УДК 550.3

ПОСТРОЕНИЕ ЯДЕР ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ПОМОЩЬЮ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛ ВЫСОКОГО РАНГА

Е.Н.Быцань

Институт геофизики им.С.И.Субботина НАН Украины, г.Киев, byzan@ukr.net

Введение

Мониторинг больших промышленных и природных объектов является одним из важнейших элементов безопасности их функционирования. Большое значение имеет визуальный контроль, который является одним из основных элементов мониторинга. Важным элементом мониторинга есть анализ физического состояния грунтов – исследование их ползучести. Процесс ползучести описывается с помощью реологических тел (РТ), построенных определенным образом в зависимости от механических параметров среды. РТ аппроксимируют процесс деформации, происходящий в исследуемых средах, и позволяют описать процесс ползучести.

Если имеется экспериментально полученная функция ползучести, то ее можно разложить в ряд по экспонентам, которые рассматриваются как базис, и по этому разложению получить спектр времен последействия и релаксации, с помощью которых можно строить реологические тела. В реологии на данное время используются реологические тела, ранг которых не превышает четыре, и которые позволяют использовать не больше двух времен последействия (времен ползучести) [3,4]. Расширение спектра времен последействия требует использования РТ более высокого порядка, а еще точнее процесс ползучести описывается с помощью интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода, которые позволяют полнее описать процесс ползучести на нужный интервал времени, т.е. прогнозировать ползучесть по экспериментально полученным данным.

Построение ядер интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

В сообщении рассматривается задача о построении ядер и резольвент интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода, описывающих процессы последействия в неупругих геологических средах, которые записываются таким образом [3,4]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}[\sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau], \tag{1}$$

$$\sigma(t) = E[\varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau], \tag{2}$$

где $K(t-\tau)-$ ядро интегрального уравнения (1), а $R(t-\tau)-$ его резольвента, так что выражение (2) есть решение уравнения (1), и наоборот – выражение (1) будет решением уравнения (2).

Ядра интегральных уравнений (1,2) будем находить с помощью функций релаксации (функций ползучести) реологических тел, с помощью которых аппроксимируют неупругие процессы в геологических средах [2]. Приведем некоторые сведения о структуре реологических тел и о методе построения РТ высокого порядка [1].

РТ n - го ранга делятся на четыре типа. Их реологические уравнения (РУ) в стандартном виде записываются таким образом:

$$\begin{aligned}
&\left(1 + a_1 D + \cdots a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma = H_n^R D\left(1 + b_1 D + \cdots b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon, && \left(N_{2n-1}\right)\\
&\left(1 + a_1 D + \cdots a_n D^n\right)\sigma = H_n^R D\left(1 + b_1 D + \cdots b_{n-1} D^{n-1}\right)\varepsilon, && \left(N_{2n}\right)\\
&\left(1 + a_1 D + \cdots a_{n-1} D^{n-1}\right)\sigma = E_n^R\left(1 + b_1 D + \cdots b_n D^n\right)\varepsilon, && \left(H_{2n}\right)\\
&\left(1 + a_1 D + \cdots a_n D^n\right)\sigma = E_n^R\left(1 + b_1 D + \cdots b_n D^n\right)\varepsilon, && \left(H_{2n+1}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

где $D = \partial / \partial t$, H и N – квазиупругие и квазивязкие РТ соответственно, E^R и H^R – релаксирующие упругие и вязкие модули соответственно, индекс внизу указывает на число элементов в невырожденном РТ, а n – его ранг. Построение РТ высокого ранга проводится путем объединения РТ меньшего порядка. При параллельном объединении двух РТ, РУ которых имеют такой вид:

$$P_1\sigma_1 = Q_1\varepsilon_1, \quad P_2\sigma_2 = Q_2\varepsilon_2, \tag{4}$$

получим РТ, РУ которого запишется следующим образом:

$$P_1P_2\sigma = \left(P_1Q_2 + P_2Q_1\right)\varepsilon, \tag{5}$$

а при последовательном объединении для РУ будет иметь место такая запись:

$$\left(P_1Q_2 + P_2Q_1\right)\sigma = Q_1Q_2\varepsilon. \tag{6}$$

Ядро интегрального уравнения (1) определяется через функцию ползучести ε так [3]:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0}\dot{\varepsilon}, \tag{7}$$

откуда следует, что для построения скорости деформации целесообразно брать любое квазивязкое реологическое тело n - го ранга, например N_{2n}, реологическое уравнение которого записывается таким образом:

$$\left(1 + a_1D + \cdots a_{n1}D^n\right)\sigma = \mathrm{H}_n^R\left(1 + b_1D + \cdots b_{n-1}D^{n-1}\right)\dot{\varepsilon}, \tag{8}$$

и в случае, когда $\sigma = \sigma_0 = const$, уравнение (8) дает для скорости деформации (функции скорости ползучести) $\dot{\varepsilon} = v$ следующее дифференциальное уравнение:

$$v^{(n-1)} + c_1v^{(n-2)} + \ldots + c_{n-2}\dot{v} + v / b_{n-1} = \sigma_0 / \left(\mathrm{H}_n^Rb_{n-1}\right), \tag{9}$$

где $c_i = b_{n-1-i} / b_{n-1}$. Его общее решение запишется таким образом:

$$v = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \exp\left(\lambda_i t\right) + \hat{v}, \tag{10}$$

где $\hat{v} = \sigma_0 / \left(\mathrm{H}_n^Rb_{n-1}\right)$ – частное решение уравнения (9), $\lambda_i = -1/\nu_i$ – времена релаксации деформации при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = const$, ν_i – корни следующего характеристического уравнения, порожденного дифференциальным уравнением (9):

$$\nu^{n-1} + c_1\nu^{n-1} + c_2\nu^{n-2} + \ldots c_n = 0, \tag{11}$$

а d_i – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Подставим в уравнение (3) значение функции скорости ползучести, полученной с помощью уравнения (10), и получим для ядра $K(t)$ интегрального уравнения (1) такое выражение:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0}\sum_{i=1}^{n-1}\left[d_ie^{-t/\tau_i} + \hat{v}\right]. \tag{12}$$

В случае, когда скорость ползучести не имеет аддитивной константы, функцию ползучести следует определять с помощью любого из квазиупругих реологических тел. Для случая, когда $\sigma = \sigma_0 = const$, для деформации (функции ползучести) ε получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\varepsilon^{(n)} + c_1\varepsilon^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\dot{\varepsilon} + \varepsilon / b_n = \sigma_0 / \left(E_n^Rb_n\right), \tag{13}$$

где $c_i = b_{n-i} / b_n$. Его общее решение запишется таким образом:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} d_i \exp\left(\lambda_i t\right) + \hat{\varepsilon}, \tag{14}$$

где $\hat{\varepsilon} = \sigma_0 / \left(E_n^Rb_n\right)$ – частное решение уравнения (13), $\lambda_i = -1/\nu_i$ – времена релаксации деформации при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = const$, ν_i – корни следующего характеристического уравнения, порожденного дифференциальным уравнением (13):

$$\nu^{n-1} + c_1\nu^{n-1} + c_2\nu^{n-2} + \ldots c_n = 0, \tag{15}$$

а d_i – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Подставим в уравнение (3) значение функции ползучести, подсчитанной с помощью уравнения (14), и получим для ядра $K(t)$ интегрального уравнения (1) такое выражение:

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_0}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\tau_i}d_ie^{-t/\tau_i}\right]. \tag{16}$$

Функция скорости ползучести, записанная согласно уравнению (10), является, по сути, разложением скорости ползучести в ряд по экспонентам. Если мы имеем экспериментально полученную функцию скорости ползучести, то ее можно разложить в ряд по экспонентам, которые рассматриваются как базис, и по этому разложению получить спектр времен последействия и релаксации, с помощью которых можно строить РТ. Заметим, что разложение функции ползучести будет тем точнее, чем больше количество экспонент в выражении (10), а это означает, что для лучшей аппроксимации функции скорости ползучести нужно брать ранг реологического тела, с помощью которого аппроксимируются неупругие процессы в геологических средах, как можно большим.

Далее построим резольвенту $R(t)$ уравнения (1). Она выражается через функцию релаксации $\sigma(t)$, которая описывает процесс релаксации напряжений в неупругой среде при постоянной деформации ε_0 таким образом [2]:

$$R(t) = \dot{\sigma}(t) / \varepsilon_0. \tag{17}$$

Функция релаксации $\sigma(t)$ находится с помощью реологических уравнений квазиупругих РТ n - го ранга. Для примера рассмотрим РТ, РУ которого в обобщенном виде записывается как H_{2n+1} и имеет такой вид:

$$\left(1 + a_1 D + \cdots a_n D^n\right)\sigma = E_n^R\left(1 + b_1 D + \cdots b_n D^n\right)\varepsilon, \tag{18}$$

и для случая, когда $\varepsilon = \varepsilon_0 = const$, для напряжения (функции релаксации) σ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\sigma^{(n)} + c_1\sigma^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\dot{\sigma} + c_n\sigma = \varepsilon_0 E_n^R / a_n, \tag{19}$$

где $c_i = a_{n-i} / a_n$. Его общее решение запишется таким образом:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} d_i \exp\left(\lambda_i t\right) + \hat{\sigma}, \tag{20}$$

где $\hat{\sigma} = \varepsilon_0 E_n^R / a_n$ – частное решение уравнения (19), $\lambda_i = -1/\nu_i$ – корни характеристического уравнения, порожденного дифференциальным уравнением (19):

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2^{\,n-2} + \ldots + c_n = 0, \tag{21}$$

ν_i – времена релаксации напряжений при постоянной деформации (времена релаксации), а d_i – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Подставим из уравнения (20) выражение для функции релаксации в уравнение (17) и получим такое выражение для резольвенты интегрального уравнения (2):

$$R(t) = \left[\sum_{i-1}^{n} d_i\lambda_i \exp\left(\lambda_i t\right)\right] / \varepsilon_0. \tag{22}$$

Заключение

Предложен алгоритм построения ядер и резольвент интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода, описывающих процессы последействия в неупругих геологических средах. Получены формулы для функций ползучести и релаксации, описывающих процесс ползучести и релаксации в геологической среде. Количество слагаемых в выражении для деформации равно рангу РТ, откуда следует, что для лучшей аппроксимации деформации целесообразно брать РТ как можно большего ранга. Построенные интегральные уравнения дают возможность точнее описать процессы деформации с учетом последействия и прогнозировать процесс ползучести по экспериментально полученным данным. Критерием повышенной опасности есть отклонение полученных мониторинговых результатов от расчетных, которые получаются с помощью априорной информации о параметрах контролируемых грунтов.

Список литературы:

1. Быцань Е.Н. Построение реологических тел высокого ранга для создания мониторинга промышленных объектов. //Проблемы сейсмотектоники. Материалы XVII Международной конференции. – Москва: 2011. – С. 145-148.
2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – Москва: Высшая школа, 1976. – 277 с.
3. Рейнер М. Реология. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
4. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – Москва: Госстройиздат, 1968. – 416 с.