

МЕТОДИКА РАСЧЕТА СИНТЕТИЧЕСКИХ СЕЙСМОГРАММ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Павлов В.М.

Камчатский филиал Геофизической службы РАН, г.Петропавловск-Камчатский, pvm@emsd.ru

Введение

Ранее автором [5,4] был предложен алгоритм, в котором расчет элементарных сейсмограмм – смещений, возбуждаемых единичными диполями, с временной функцией в виде ступеньки – производился «непосредственно». При этом исходная задача расчета смещений в слоисто однородном упругом изотропном полупространстве заменялась задачей для полупространства с искусственной цилиндрической границей, на которой ставились определенные граничные условия. Это делалось для того чтобы перейти от непрерывного волнового числа и интегралов к дискретным волновым числам и суммам. В этом заключается метод Алексеева-Михайленко [2]. Было получено представление искомого решения в виде рядов с неизвестными коэффициентами – компонентами вектора движения-напряжения, зависящими от глубины, которые удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Система решается в частотной области для набора дискретных частот и волновых чисел с помощью техники матричного импеданса [3,4,5], с последующей подстановкой результата для каждого волнового числа и частоты в представление для смещения, суммирования и перехода из частотной области, где производились вычисления, во временную область. В этом подходе исходный точечный импульсный источник – либо простая сила, либо диполь общего вида – представляется в виде эквивалентной совокупности скачков, как вектора смещения, так и вектора напряжения на границе источника.

Альтернативный подход заключается в том, чтобы взять решение для простой силы (функции Грина) и продифференцировать по координатам источника (см., например, [1]).

В данной работе я привожу выражение для функций Грина (образуют тензор) в явном виде содержащее координаты источника. Дифференцирование по горизонтальным координатам не вызывает затруднений. Для того чтобы выполнить дифференцирование по глубине источника используется свойство взаимности решений СОДУ для вектора движения-напряжения, которое устанавливается в данной работе.

Дифференцирование по координатам источника приводит в точности к тем же формулам для расчета сейсмограмм, которые были получены непосредственным путем [4].

Новый алгоритм получим, если дифференцирование по горизонтальным координатам приемника заменим (со знаком минус) на соответствующие производные по координатам источника. При этом вносится ошибка, сопоставимая с той, которая обусловлена наличием искусственной границы (ИГ). Чем дальше удалена ИГ, тем меньше ошибка.

Этот алгоритм является более прозрачным, компактным и экономичным. Он требует проведения вычислений для волновых чисел, связанных с корнями функций Бесселя порядка 0 и 1, тогда как в предыдущем алгоритме требуются также корни порядка 2. Компьютерное время, необходимое для расчетов, сокращается на 20-25 %.

Постановка задачи

Рассмотрим слоисто однородную упругую изотропную среду, состоящую из полупространства и лежащей на нем пачки слоев. Ниже используется декартова система координат с началом в «эпицентре» и осями: x – на север, y – на восток, z – вниз. А также связанная с ней цилиндрическая система координат r, φ, z .

Смещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \varphi, z, t)$ удовлетворяет уравнению динамической теории упругости

$$(1) \quad \rho \partial_t^2 \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{f} \delta(t)$$

где \mathbf{f} – объемная плотность силы с компонентами $f_i = F_i \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta})$, ($i=1,2,3$); $\boldsymbol{\zeta} = (x_s, y_s, z_s)$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, F_i – компоненты силы.

Также должны быть выполнены следующие условия. *Внешняя граница свободна* от напряжений: $\mathbf{T}(x, y, 0) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{T} = (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})^T$ – вектор (столбец) напряжения на горизонтальной плоскости. *На границах разрыва свойств среды* смещения и напряжения непрерывны. *В начальный момент времени* (до включения источника) среда покоится.

Смещение от диполя с тензором сейсмического момента \mathbf{M} выражается через производные от функций Грина по координатам источника [1] (в частотной области)

$$(2) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s; \omega) = \partial_i^s \mathbf{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s; \omega) \mathbf{M} \mathbf{e}_i$$

где ∂_i^s – производная по i -той координате источника; $\mathbf{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s; \omega)$ – матрица функций Грина; \mathbf{e}_i – орт декартовой системы координат (столбец); ($i = 1, 2, 3$); (суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3)

Предполагаем, что частота имеет малую отрицательную мнимую добавку. Для дискретизации задачи по волновому числу вводим искусственную границу $C = \{r = a, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z < \infty\}$, на которой выполнены условия $(\nabla \times \mathbf{u})|_C = 0$, $(\nabla \cdot \mathbf{u})|_C = 0$, $u_z|_C = 0$ [4].

Матрица Грина

Эта матрица состоит из столбцов – откликов на единичную силу, направленную по j -той оси, где j – номер столбца. Можно показать, что верно выражение

$$(3a) \quad \mathbf{G}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_s; \omega) = -\frac{1}{2\pi F_0} D_0(z, \omega | z_s) \sum_{|m|=1}^{\infty} \frac{1}{w_0^{(m)}} \mathbf{w}_0^{(m)}(x, y) \mathbf{w}_0^{(m)*T}(x_s, y_s) - \\ - \frac{1}{2\pi F_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_n^{(m)}} \mathbf{W}_n^{(m)}(x, y) \mathbf{D}_n^{(m)}(z, \omega | z_s) \mathbf{W}_n^{(m)*T}(x_s, y_s)$$

где $\mathbf{W}_n^{(m)} = e^{im\varphi} \mathbf{R}^T \mathbf{J}_2 \mathbf{A}_n^{(m)} \mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2 = \text{diag}(1, i, 1)$, $\mathbf{J}_1 = \text{diag}(i, 1, 1)$,

$$(3b) \quad \mathbf{A}_n^{(m)} = \begin{pmatrix} mJ_m(b)b^{-1} & J'_m(b) & 0 \\ J'_m(b) & mJ_m(b)b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -J_m(b) \end{pmatrix}, \quad b = k_n^{(m)} r;$$

$\mathbf{w}_0^{(m)} = e^{im\varphi} r^{|m|-1} (\mathbf{e}_r + i\mathbf{e}_\varphi)$, $\mathbf{w}_0^{(-m)} = (-1)^m \mathbf{w}_0^{(m)*}$, $m \geq 1$, ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ – орты цилиндрической системы координат); $w_0^{(m)} = \frac{a^{2|m|}}{|m|}$, ($|m| \geq 1$), $w_n^{(m)} = \frac{a^2}{2} [J_{|m|-1}(k_n^{(m)} a)]^2$, $k_n^{(m)}$, ($n = 1, 2, \dots$) – ненулевые корни

уравнения $J_m(xa) = 0$; J_m – функция Бесселя, звездочка – комплексное сопряжение;

$\mathbf{D}_n^{(m)}(z, \omega | z_s) = \mathbf{D}(z, \omega, k_n^{(m)} | z_s)$ – 3x3 матрица базисных решений (решение первой системы (4)), а D_0 – ее скалярный аналог – решение второй системы (4).

Уравнения для матрицы базисных решений \mathbf{D}

Матрица базисных решений (МБР) $\mathbf{D} = \mathbf{D}(z; \omega, k_n^{(m)})$ и скаляр D_0 является частью решения СОДУ для вектора движения-напряжения (выражения для 3x3 матриц \mathbf{A}_{ij} , ($i, j = 1, 2$) см. в [3])

$$(4) \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ F_0 \mathbf{I} \delta(z - z_s) \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} D_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu \\ -\rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0 \\ S_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \delta(z - z_s) \end{pmatrix},$$

где \mathbf{I} – единичная матрица третьего порядка; $F_0 = 1$ н.

Формулы для расчета МБР включают матричный импеданс и пропагатор для вектора движения, и приведены в [3].

Свойство взаимности матрицы базисных решений \mathbf{D}

Пусть имеется два матричных решения системы (4) для источников на глубинах $z_s = \zeta_1 \geq 0$ и $z_s = \zeta_2 > \zeta_1$ соответственно: $(\mathbf{D}(z | \zeta_i), \mathbf{S}(z | \zeta_i))$, $(i = 1, 2)$, тогда

$$(5) \quad \mathbf{D}(\zeta_1 | \zeta_2) = \mathbf{D}^T(\zeta_2 | \zeta_1) \text{ (индекс Т обозначает транспонирование).}$$

Это свойство позволяет получить выражение для производной МБР по глубине (используем уравнение (4))

$$(6) \quad \frac{d}{dz_s} \mathbf{D}(z | z_s) = \left\{ \frac{d}{dz_s} \mathbf{D}(z_s | z) \right\}^T = \mathbf{D}(z | z_s) (\mathbf{A}_{11}^T + \mathbf{H}(z_s | z) \mathbf{A}_{12}^T)$$

где $\mathbf{H}(z_s | z)$ – матрица импеданса [3] (симметрична). Для D_0 верны аналоги формул (5), (6)

Формулы для сейсмограмм

Согласно формуле (2) для получения сейсмограмм смещений нужно продифференцировать функции Грина (3а) по координатам источника. Это в точности приводит к алгоритму, представленному в статье автора [3]. Мы получим новый алгоритм, если будем дифференцировать по горизонтальным координатам приемника. В задаче без искусственной границы сейсмограммы зависят от разности горизонтальных координат приемника и источника. Поэтому производные отличаются лишь знаком. В случае задачи с искусственной границей подобное соотношение выполнено лишь приближенно; погрешность составляет величину того же порядка что и отражения от искусственной границы. Перед дифференцированием по x, y полагаем $x_s = y_s = 0$. В этом случае выражение (3а) принимает вид

$$(7) \quad \mathbf{G} = \mathbf{R}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{R}, \text{ где } \mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 & a_1^{(0)} \\ 0 & a_2^{(1)} & 0 \\ a_3^{(1)} & 0 & a_3^{(0)} \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Величины $a_i^{(0)}, a_i^{(1)}$, $(i = 1, 2, 3)$ являются компонентами векторных функций $\mathbf{a}^{(0)}, \mathbf{a}^{(1)}$

$$(8) \quad \mathbf{a}^{(0)} = \frac{1}{2\pi F_0} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_n^{(0)} \mathbf{e}_3;$$

$$(9) \quad \mathbf{a}^{(1)} = -\frac{1}{2\pi F_0} \left(2a^{-2} D_0 \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}_n^{(1)} \right) (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2);$$

где

$$\mathbf{B}_n^{(m)} = \mathbf{A}_n^{(m)}(b) \mathbf{D}(z, \omega, k_n^{(m)} | z_s) / w_n^{(m)}, \quad b = k_n^{(m)} r$$

Подстановка выражения (7) в формулу (2) и замена $\frac{\partial}{\partial x^s} = -\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y^s} = -\frac{\partial}{\partial y}$ после перехода к цилиндрическим компонентам приводит к выражениям для спектра сейсмограмм смещения

$$(10) \quad \begin{pmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 & a_1^{(0)} \\ 0 & a_2^{(1)} & 0 \\ a_3^{(1)} & 0 & a_3^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{rr} \\ M_{\varphi r} \\ M_{zr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a_1^{(1)} - a_2^{(1)} & 0 \\ a_1^{(1)} - a_2^{(1)} & 0 & a_1^{(0)} \\ 0 & a_3^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{r\varphi} \\ M_{\varphi\varphi} \\ M_{z\varphi} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z_s} \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & 0 & a_1^{(0)} \\ 0 & a_2^{(1)} & 0 \\ a_3^{(1)} & 0 & a_3^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{rz} \\ M_{\varphi z} \\ M_{zz} \end{pmatrix}$$

Для того чтобы получить явные формулы нужно продифференцировать компоненты векторных функций (8), (9) по r и z_s . Зависимость от r входит через компоненты матрицы (3б) поэтому производные по r будут выражаться через производные функций Бесселя по аргументу умноженные на $k_n^{(m)}$. Производные по z_s нужно брать только от $\mathbf{D}(z, \omega, k_n^{(m)} | z_s)$ (и $D_0(z, \omega | z_s)$) и нужно воспользоваться формулой (6) (и ее аналогом для D_0).

При практических расчетах ряды заменяются конечными суммами. Критерием завершения суммирования является выполнение условия $|a_N(\omega)| < \varepsilon |\sum_{n=1}^N a_n(\omega)|$. Для перехода во временную область применяется обратное (дискретное) преобразование Фурье. После этого сейсмограммы корректируются за мнимую добавку к частоте ω_1 по формуле $u(t) \rightarrow u(t) \exp(|\omega_1| t)$. Для получения сейсмограмм смещений источника, который включается и остается в среде, нужно взять интеграл от нуля до текущего момента времени t .

Пример расчета

Для расчета БФА нужно задать среду (положение границ, скорости продольных и поперечных волн, плотность, добротность), глубину источника z_s , эпицентральное расстояние r , длительность временного интервала T , число отсчетов N . Кроме того задается расстояние до искусственной границы (ИГ) a и значение параметра ε . Как только БФА рассчитаны можно вычислить сейсмограмму для любого тензора \mathbf{M} на любом азимуте φ и для любой временной функции источника.

В алгоритме используется комплексная добавка к частоте $\omega_1 = -i\pi/T$. Для расстояния до ИГ применяется формула $a = (KT\alpha_{\max} + r)/2$, где α_{\max} - максимальная скорость продольных волн в слоях над источником. При этом при фиксированном $K=1,2,\dots$ гарантировано подавление отраженных от ИГ волн в $\exp(K\pi)$ раз (при $K=2$, более чем в 500 раз).

На рис.2 представлены результаты расчета элементарных сейсмограмм (от симметричного ТСМ) и сравнение с аналитическим решением для среды, показанной на рис.1. Геометрия среды и положение источника и приемника (в плоскости xz) выбраны так, чтобы прямые волны можно было рассчитать независимо по аналитическим формулам. Из рис.2 видно, что отличие от аналитического решения не превышает 0.5 % от максимума модуля амплитуды. Основной источник погрешностей при принятых условиях расчета – отражения от искусственной границы.

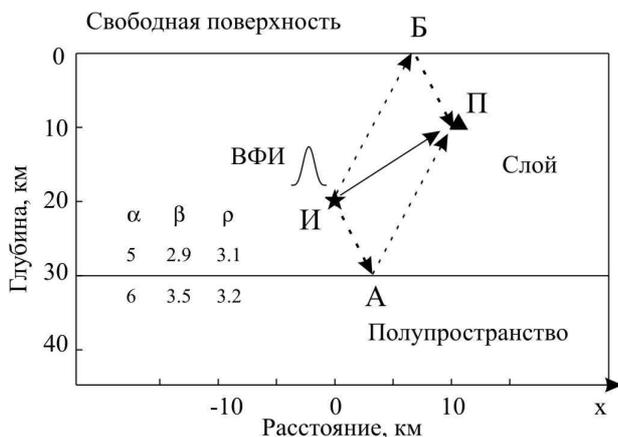


Рис.1. Слой мощности 30 км на полупространстве. Источник (И) – на глубине 20 км. Приемник – на глубине 10 и эпицентральном расстоянии 10 км. Приведены значения скоростей (км/с) и плотности (г/см^3). ВФИ – временная функция источника. Пока не придут отраженные от свободной поверхности и полупространства Р-волны (лучи ИБП и ИАП, $t_{PP}=6.3$ с), прямые волны (луч ИП) будут такими же, как в безграничном пространстве. На рис.2 – результаты сравнения элементарных сейсмограмм (свернутых с ВФИ), рассчитанных по описанному алгоритму и по аналитическим формулам для безграничного пространства. Длительность ВФИ равна 0.25 с.

Заключение

Установлено свойство взаимности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений для вектора движения, которое позволяет получить компактную формулу для производной вектора движения по глубине источника.

Для слоисто однородной упругой среды с искусственной границей получено выражение для функций Грина, которое зависит явно от координат источника и приемника. Дифференцирование функций Грина по координатам источника приводит к тем же расчетным формулам, что и алгоритм, развитый автором ранее [3].

Новый алгоритм получаем при замене производных по горизонтальным координатам источника производными по горизонтальным координатам приемника (со знаком минус). Этот

алгоритм является более прозрачным, компактным и экономичным по сравнению с предыдущим. Он требует проведения вычислений для волновых чисел, связанных с корнями функций Бесселя порядка 0 и 1, тогда как в предыдущем алгоритме требуются также корни порядка 2. Компьютерное время, необходимое для расчетов, сокращается на 20-25 %.

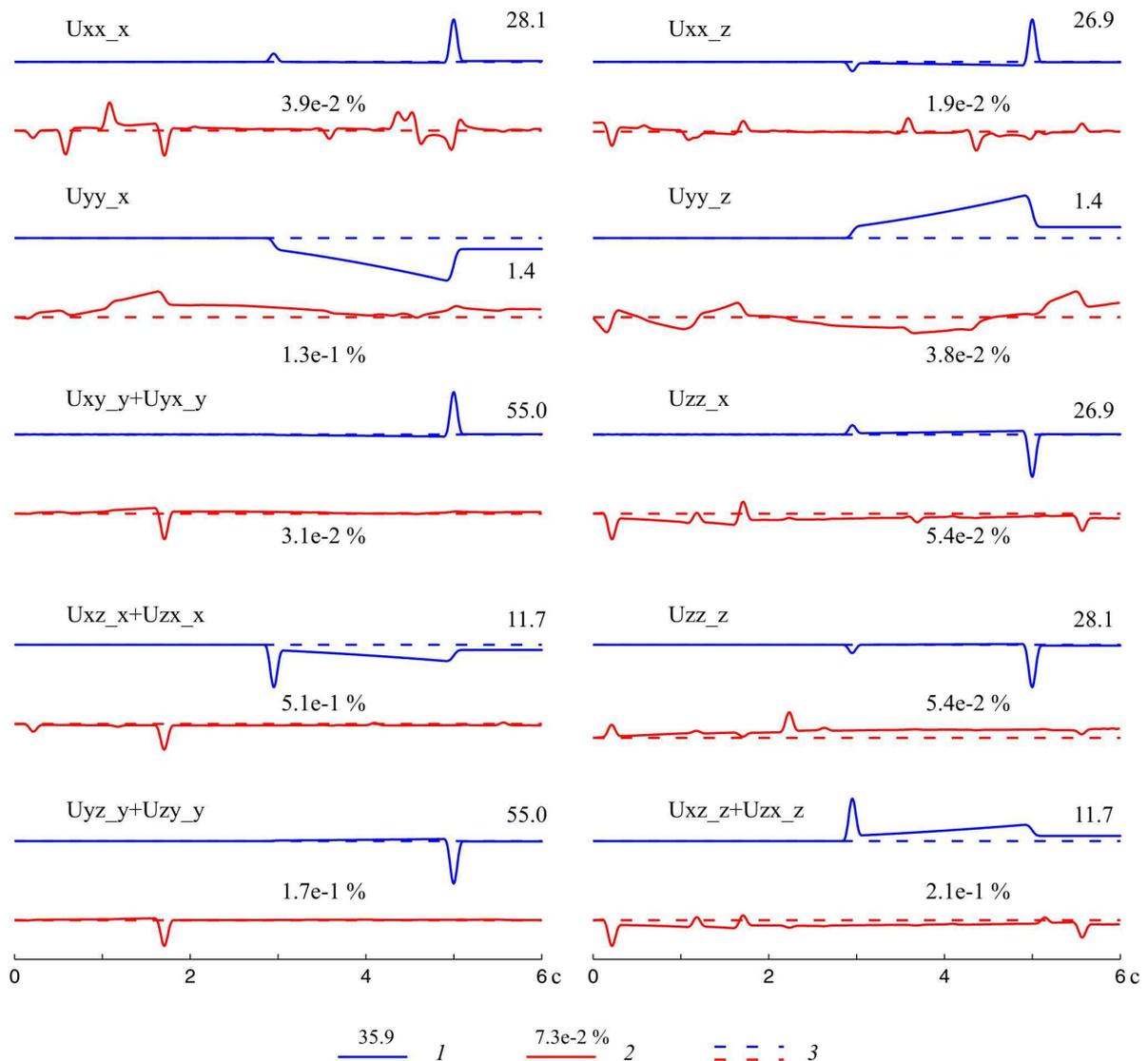


Рис.2. Элементарные сейсмограммы, рассчитанные предлагаемым методом (1, число – максимальная по абсолютной величине амплитуда смещения) и их разности с аналитическим решением (2, указан максимум разности в процентах по отношению к максимуму на кривой 1). Также показаны нулевые линии (3). В расчете принято: полная длительность сейсмограммы 16 с, число отсчетов 2048. Расстояние до ИГ 86 км, значение M_0 10^{18} Нм, ϵ 10^{-10} . Сейсмограммы профильтрованы косинусным фильтром с параметрами 0, 0, 10, 16 Гц. Время счета 36 с.

Список литературы

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир. 1983. 520 с.
2. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. Метод расчета теоретических сейсмограмм для сложнопостроенных моделей сред // Доклады АН СССР. 1978. Т. 240. № 5. С. 1062-1065.
3. Павлов В.М. Матричный импеданс в задаче расчета синтетических сейсмограмм в слоисто-однородной изотропной упругой среде // Физика Земли. 2009. № 10. С. 14-24.
4. Павлов В.М. Алгоритм расчета синтетических сейсмограмм в слоистом полупространстве с применением матричного импеданса // Физика Земли. 2013. № 1. С. 26-35.
5. Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in a layered half-space // Proceedings of the International Conference "Problems of Geocosmos". St. Petersburg: 2002. P. 320-323.