УДК 550.34

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИХ СМЕЩЕНИЙ В СЛОИСТО ОДНОРОДНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗЕМЛЕ НА ОСНОВЕ ТЕХНИКИ МАТРИЧНОГО ИМПЕДАНСА

Павлов В.М.

Камчатский филиал Геофизической службы РАН, г.Петропавловск-Камчатский, pvm@emsd.ru

Введение

Ранее автором [2] был предложен алгоритм расчета статики в слоистом упругом изотропном полупространстве. В данной работе предлагается аналогичный алгоритм для слоистого шара. Алгоритм использует представление решения через векторные поверхностные гармоники [7]. Неизвестные функции радиальной переменной – радиальные функции – образуют вектор движения-напряжения, удовлетворяющий системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Алгоритм расчета радиальных функций аналогичен алгоритму расчета функций глубины в слоистом полупространстве [2, 3, 6] с заменой экспоненциальных функций глубины на степенные функции радиальной сферической переменной. Задача сводится к расчету импеданса – матрицы, переводящей вектор движения в вектор напряжения – и пропагатора для вектора движения. Для построения решения СОДУ используется аналитическое решение для сферического слоя.

В отличие от случая безграничной среды для построения решения нужно исключить перемещение и поворот шара как твердого тела. Эти условия формулируются как неподвижность центра масс и равенство нулю момента количества движения.

Постановка задачи

Рассмотрим слоисто однородный упругий изотропный шар, состоящий из «ядра» – внутреннего шара, и лежащей на нем пачки сферических слоев. Ниже используется геоцентрическая декартова система координат О*xyz*, связанная с гипоцентром землетрясения (рис.1), а также сферическая система координат r,θ,ψ .

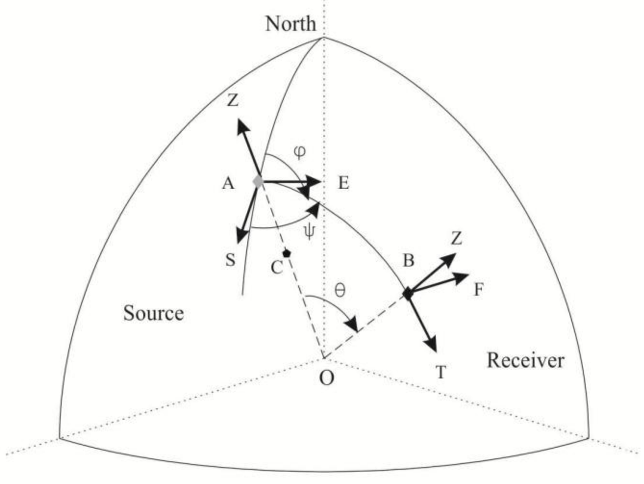

Рис.1. Декартова система координат определяется ортами $\mathbf{e}_1$ (AS), $\mathbf{e}_2$ (AE), $\mathbf{e}_3$ (AZ). А – эпицентр, AS – направление на юг, AE – на восток, AZ – по радиусу к зениту. Сферическая система координат:

$x=r\sin\theta\cos\psi$, $y=r\sin\theta\sin\psi$, $z=r\cos\theta$

r – радиус, θ – «colatitude» – эпицентральное расстояние, ψ – «долгота» – полярный угол. Источник имеет координаты (r_s,0,0). Орты сферической системы координат в приемнике

BT: $\mathbf{e}_\theta=(\cos\theta\cos\psi, \cos\theta\sin\psi, -\sin\theta)^T$
BF: $\mathbf{e}_\psi=(-\sin\psi, \cos\psi, 0)^T$
BZ: $\mathbf{e}_r=(\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta)^T$

(«Т» - транспонирование). Буквой φ на рисунке обозначен азимут из эпицентра на приемник. AB – дуга большого круга.

Требуется рассчитать статические смещения от точечного диполя общего вида с симметричным тензором сейсмического момента M_{ij}, (i,j=1,2,3). При этом смещение $\mathbf{u}=\mathbf{u}(r,\theta,\psi)$ удовлетворяет уравнению статической теории упругости и граничным условиям. *Внешняя граница свободна* от напряжений: $\mathbf{T}(r,\theta,\psi)\big|_{r=a}=\mathbf{0}$, где $\mathbf{T}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_r$ – вектор напряжения на площадке с нормалью, направленной по радиусу. *На границах разрыва свойств среды* смещения и напряжения непрерывны. Кроме того, для исключения движения шара как твердого тела используются условия [5]:

$\int\limits_V \rho\mathbf{u}dV=0$ (неподвижность центра масс ρ – плотность), и

$\int_V \rho\mathbf{u}\times\mathbf{r}dV = 0$ (отсутствие момента количества движения).

Представление решения

Для построения решения используем разложения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{T}$ по векторным поверхностным гармоникам $\mathbf{T}_l^m, \mathbf{S}_l^m, \mathbf{R}_l^m$ [1]

$$\mathbf{u}(r,\theta,\psi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mathbf{K}_l^m(\theta,\psi)\mathbf{d}_l^m(r),\ \mathbf{T}(r,\theta,\psi) = r^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mathbf{K}_l^m(\theta,\psi)\mathbf{s}_l^m(r) \quad (1)$$

где $\mathbf{K}_l^m = (\mathbf{T}_l^m, \mathbf{S}_l^m, \mathbf{R}_l^m)$ – 3x3 матрица; $\mathbf{d}_l^m = (W,V,U)^{\mathrm{T}}$ – вектор движения; $r^{-1}\mathbf{s}_l^m = (T,S,R)^{\mathrm{T}}$ – вектор напряжения (обозначение компонент векторов по [1]). Неизвестные функции радиуса удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ r^{-1}\mathbf{s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{d}\\ r^{-1}\mathbf{s}\end{pmatrix} \quad (2)$$

Выражения для матриц $\mathbf{A}_{ij}, (i, j = 1, 2)$ получаются комбинированием матриц (8.33) и (8.34) из книги [1]. Наличие источника проявляется в том, что зависимые переменные имеют разрыв на границе источника при r=r_s. В зависимости от значения азимутального числа m для величины разрыва (скачка) имеем следующие выражения (см. также [7])

$$m=0:\ [\mathbf{d}_l^{(0)}] = \frac{1}{(\lambda_s + 2\mu_s)r_s^2}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}\mathbf{e}_3 M_{zz}, \quad (3а)$$

$$[\mathbf{s}_l^{(0)}] = \frac{1}{2r_s^2}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}(k_l\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)\left(M_{xx} + M_{yy} - \frac{2\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}M_{zz}\right), \quad (3б)$$

$$m=1:\ [\mathbf{d}_l^{(1)}] = -\frac{1}{r_s^2}\frac{1}{2\mu_s}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}(-i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\left(M_{xz} - iM_{yz}\right),\quad [\mathbf{s}_l^{(1)}] = \mathbf{0}, \quad (3в)$$

$$m=2:\ [\mathbf{d}_l^{(2)}] = \mathbf{0},\ [\mathbf{s}^{(2)}] = -\frac{1}{4r_s^2}\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}p_l(-i\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\left(M_{xx} - M_{yy} - 2iM_{xy}\right), \quad (3г)$$

$$m>2:\ [\mathbf{d}_l^{(m)}] = \mathbf{0},\ [\mathbf{s}_l^{(m)}] = \mathbf{0}, \quad (3д)$$

$k_l = [l(l+1)]^{1/2}$, $p_l = [(l+2)(l-1)]^{1/2}$, $(l = 0, 1, 2, \ldots)$; $\mathbf{e}_i$, $(i = 1,2,3)$ – орты – столбцы единичной матрицы 3-его порядка. При отрицательных m

$[\mathbf{d}_l^{(m)}] = (-1)^m[\mathbf{d}_l^{(m)}]^*$, $[\mathbf{s}_l^{(m)}] = (-1)^m[\mathbf{s}_l^{(m)}]^*$ (*– комплексное сопряжение). Условия неподвижности шара как твердого тела принимают вид

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\int_0^{r_E}\rho\mathbf{d}_1^{(m)}r^2dr = 0,\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\int_0^{r_E}\rho\mathbf{d}_1^{(m)}r^3dr = 0,\ (m=0,1) \quad (4)$$

Решение СОДУ (2)

Приведем формулы для решения СОДУ (2). Используем метод матричного импеданса [3; 4]. Для этого вводится импеданс $\mathbf{H}(r)$ – матрица, переводящая вектор движения в вектор напряжения:

$$\mathbf{s}(r) = \mathbf{H}(r)\mathbf{d}(r) \tag{5}$$

и пропагатор вектора движения $\mathbf{Q}(r_2, r_1)$:

$$\mathbf{d}(r_2) = \mathbf{Q}(r_2, r_1)\mathbf{d}(r_1) \tag{6}$$

Формулы для расчета импеданса и пропагатора получаются при выводе, аналогичном приведенному в статье [3]. При этом используется решение СОДУ (2) в однородном сферическом слое

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}(r) \\ \mathbf{s}(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1(r) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2^{-1}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{D}_1(r) = r^l \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \ \mathbf{D}_2(r) = r^l \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \tag{8}$$

Выражения для матриц $\mathbf{L}_{ij}, (i, j = 1, 2)$

$$\mathbf{L}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_l & k_l\big(\lambda(l+3) + \mu(l+5)\big) \\ 0 & l & (l+1)\big(\lambda l + \mu(l-2)\big) \end{pmatrix}, \ \mathbf{L}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_l & -k_l\big(\lambda(l-2) + \mu(l-4)\big) \\ 0 & -(l+1) & l\big(\lambda(l+1) + \mu(l+3)\big) \end{pmatrix} \tag{9а}$$

$$\mathbf{L}_{21} = 2\mu \begin{pmatrix} (l-1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & k_l(l-1) & k_l\big(\lambda(l^2+2l) + \mu(l^2+2l-1)\big) \\ 0 & l(l-1) & (l+1)\big(\lambda(l^2-l-3) + \mu(l^2-l-2)\big) \end{pmatrix}, \tag{9б}$$

$$\mathbf{L}_{22} = 2\mu \begin{pmatrix} -(l+2)/2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_l(l+2) & k_l\big(\lambda(l^2-1) + \mu(l^2-2)\big) \\ 0 & (l+1)(l+2) & -l\big(\lambda(l^2+3l-1) + \mu(l^2+3l)\big) \end{pmatrix} \tag{9в}$$

Векторы $\mathbf{w}_1$ $\mathbf{w}_2$ постоянны в пределах слоя. Введенные матричные функции: импеданс **H**, и пропагатор **Q** зависят от углового числа *l*, но не зависят от азимутального числа *m*. Если построен пропагатор и известно значение вектора движения на верхней стороне границы источника $\mathbf{d}(r_s + 0)$, то для его значения выше границы источника – решение СОДУ (2) – имеем выражение

$$\mathbf{d}(r) = \mathbf{Q}(r, r_s)\mathbf{d}(r_s + 0) \tag{10}$$

Расчет $\mathbf{d}(r_s + 0)$: случаи *l ≠ 1 и l = 1*

Из (5) получаем условие на $\mathbf{d}(r_s + 0)$

$$[\mathbf{H}(r_s)]\mathbf{d}(r_s + 0) = [\mathbf{s}(r_s)] - \mathbf{H}(r_s - 0)[\mathbf{d}(r_s)] \tag{11}$$

В случае l ≠ 1 матрица $[\mathbf{H}(r_s)]$ обратима и

$$\mathbf{d}(r_s+0)=[\mathbf{H}(r_s)]^{-1}\left([\mathbf{s}(r_s)]-\mathbf{H}(r_s-0)[\mathbf{d}(r_s)]\right). \tag{12}$$

Поэтому при $r \geq r_s$

$$\mathbf{d}(r)=\mathbf{B}^d(r)[\mathbf{d}(r_s)]+\mathbf{B}^s(r)[\mathbf{s}(r_s)] \qquad (13а)$$

где

$$\mathbf{B}^s(r)=\mathbf{Q}(r,r_s)[\mathbf{H}(r_s)]^{-1},\ \mathbf{B}^d(r)=-\mathbf{B}^s(r)\mathbf{H}(r_s-0) \qquad (13б)$$

Аналогичная формула верна и для приемника с радиусом меньшим, чем радиус источника с заменой $\mathbf{H}(r_s-0)$ на $\mathbf{H}(r_s+0)$. Вектор напряжения получается умножением (13а) слева на импеданс.

Полученные формулы применимы, если существует $\left([\mathbf{H}(r_s)]\right)^{-1}$.

В случае l = 1 матрица $\mathbf{H}$ имеет структуру

$$\mathbf{H}=a\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix},\ (a=H_{22}) \tag{14}$$

Поэтому матрица $[\mathbf{H}(r_s)]$ вырождена, и уравнение (11) относительно $\mathbf{d}(r_s+0)$ не является однозначно разрешимым. Условия неподвижности центра масс и равенства нулю момента количества движения позволяют однозначно разрешить уравнение (11) относительно $\mathbf{d}(r_s+0)$ и для этого случая. Введем тройку векторов

$$\mathbf{a}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{a}_2=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{a}_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

Отметим, что $\mathbf{Ha}_1=\mathbf{0}$, $\mathbf{Ha}_2=\mathbf{0}$, $\mathbf{Ha}_3=3H_{22}\mathbf{a}_3$. Неизвестный вектор $\mathbf{d}(r_s+0)$ разложим по введенным векторам (при фиксированном m=0 или 1)

$$\mathbf{d}(r_s+0)=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3 \tag{16}$$

Для определения трех неизвестных имеем три уравнения: одно из условия (11) и два из условий (4). В результате и в случае l=1 для вектора движения получим выражение структурно аналогичное (13а).

Базовые функции и элементарные сейсмограммы

Подставим выражение (13а) в первую из формул (1). С учетом выражений (3) для скачков

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(0)}+\mathbf{u}^{(1)}+\mathbf{u}^{(2)},\ \text{где}\ \mathbf{u}^{(0)}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{K}_l^0\left(\mathbf{B}_l^d(r)[\mathbf{d}_l^0(r_s)]+\mathbf{B}_l^s(r)[\mathbf{s}_l^0(r_s)]\right), \qquad (17а)$$

$$\mathbf{u}^{(1)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\mathbf{K}_l^{(1)}\mathbf{B}_l^d(r)[\mathbf{d}_l^{(1)}(r_s)]+\mathbf{K}_l^{(-1)}\mathbf{B}_l^d(r)[\mathbf{d}_l^{(-1)}(r_s)]\right), \qquad (17б)$$

$$\mathbf{u}^{(2)}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\mathbf{K}_l^{(2)}\mathbf{B}_l^s(r)[\mathbf{s}_l^{(2)}(r_s)]+\mathbf{K}_l^{(-2)}\mathbf{B}_l^s(r)[\mathbf{s}_l^{(-2)}(r_s)]\right) \qquad (17в)$$

При $l \neq 1$ величины $\mathbf{B}_l^d(r)$, $\mathbf{B}_l^s(r)$ даны формулами (13б); в случае l=1 выражения для них получаются описанным выше способом.

Введем вектор $\mathbf{U}=\mathbf{Ru}$, с компонентами U_θ, U_ψ, U_r, где $\mathbf{R}\equiv\left(\mathbf{e}_\theta,\mathbf{e}_\psi,\mathbf{e}_r\right)^{\mathbf{T}}$ – матрица перехода к сферическим компонентам. Тогда после преобразований из (17) получим выражение для решения через элементарные сейсмограммы – функции влияния компонент тензора сейсмического момента $\mathbf{M}^c = \mathbf{RMR}^{\mathrm{T}}\Big|_{\theta=0}$

$$\begin{pmatrix} U_\theta \\ U_\psi \\ U_r \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_1^{(0)} + g_1^{(2)} \\ 0 \\ g_3^{(0)} + g_3^{(2)} \end{pmatrix} M_{11}^c + \begin{pmatrix} 0 \\ g_2^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} M_{12}^c + \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ 0 \\ h_3^{(1)} \end{pmatrix} M_{13}^c + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_1^{(0)} - g_1^{(2)} \\ 0 \\ g_3^{(0)} - g_3^{(2)} \end{pmatrix} M_{22}^c + \begin{pmatrix} 0 \\ h_2^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} M_{23}^c + \begin{pmatrix} (h_1^{(0)} - g_1^{(0)})\chi_s \\ 0 \\ (h_3^{(0)} - g_3^{(0)})\chi_s \end{pmatrix} M_{33}^c \qquad (18а)$$

где M_{11}^c и т.д. – компоненты матрицы $\mathbf{M}^c$;

$g_i^{(0)}, h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, g_i^{(2)},\ (i = 1,2,3)$ – компоненты базовых вектор-функций

$$\mathbf{g}^{(0)} = \frac{1}{4\pi r_s^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathbf{A}_l^{(0)}\mathbf{B}_l^s(r)(k_l\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3),\ \mathbf{h}^{(0)} = \frac{1}{4\pi\lambda_s r_s^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\mathbf{A}_l^{(0)}\mathbf{B}_l^d(r)\mathbf{e}_3, \qquad (18б)$$

$$\mathbf{h}^{(1)} = \frac{1}{4\pi r_s^2\mu_s}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{k_l}\mathbf{A}_l^{(1)}\mathbf{B}_l^d(r)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),\ \mathbf{g}^{(2)} = -\frac{1}{4\pi r_s^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{k_l}\mathbf{A}_l^{(2)}\mathbf{B}_l^s(r)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2); \qquad (18в)$$

$$\mathbf{A}_l^{(m)} = \frac{1}{k_l}\begin{pmatrix} \dfrac{m}{\sin\theta}P_l^m(q) & -\sin\theta\dfrac{d}{dq}P_l^m(q) & 0 \\ -\sin\theta\dfrac{d}{dq}P_l^m(q) & \dfrac{m}{\sin\theta}P_l^m(q) & 0 \\ 0 & 0 & k_l P_l^m(q) \end{pmatrix},\ (q = \cos\theta, m = 0, 1, 2),\ \chi_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_s + 2\mu_s}$$

$P_l^m(q) \equiv P_l^m(\cos\theta)$ – присоединенная функция Лежандра.

Заключение

В работе предлагается полуаналитический алгоритм расчета статических смещений в слоисто однородном изотропном шаре от дипольного источника с симметричным тензором сейсмического момента. Алгоритм использует представление решения через векторные поверхностные гармоники, включающее неизвестные функции радиальной переменной – радиальные функции. Алгоритм расчета радиальных функций аналогичен алгоритму расчета функций глубины в слоистом полупространстве. Для построения решения СОДУ используется аналитическое решение для сферического слоя. В отличие от случая безграничной среды для построения решения нужно учесть условие неподвижности шара в целом. Полученные формулы объединяют сфероидальный и тороидальный случаи и имеют компактный вид.

Список литературы

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1. М.: Мир. 1983. 520 с.
2. Павлов В.М. Расчет смещений от статической силы в слоистом полупространстве. Вулканология и сейсмология, № 4, с. 25-33, 2006.
3. Павлов В.М. Матричный импеданс в задаче расчета синтетических сейсмограмм в слоисто-однородной изотропной упругой среде // Физика Земли. 2009. № 10. С. 14-24.
4. Павлов В.М. Алгоритм расчета синтетических сейсмограмм в слоистом полупространстве с применением матричного импеданса // Физика Земли. 2013. № 1. С. 26-35.
5. Ben-Menahem A., Singh S.J. Seismic waves and sources. New York : Springer-Verlag, 1981. 1108 P.
6. Pavlov V.M. A convenient technique for calculating synthetic seismograms in a layered half-space // Proceedings of the International Conference “Problems of Geocosmos”. St. Petersburg: 2002. P. 320-323.
7. Pollitz F.F. Coseismic deformation from earthquake faulting on a layered spherical earth // Geophys. J. Int. 1996. V