

**ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В МОДЕЛЬНОЙ АКВАТОРИИ И ЕЁ
ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ВЕРИФИКАЦИИ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ НАКАТА ДЛИННЫХ ВОЛН НА БЕРЕГ**

Мацкевич Н.А.¹, Рычков А.Д.², Чубаров Л.Б.^{1,2}

¹ *Новосибирский государственный университет г. Новосибирск*

² *Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, chubarov@ict.nsc.ru*

Введение

Численное моделирование наката волны цунами на побережье в рамках теории мелкой воды сопряжено со значительными трудностями, связанными с вырождением системы уравнений на границе раздела воды и суши, а также с негладкостью профиля дна в прибрежной зоне. Поэтому разработка робастных алгоритмов для расчета наката представляет собой серьезную проблему, для успешного решения которой необходимы максимально релевантные методы верификации. Примером такой достаточно апробированной задачи для верификации численных алгоритмов является задача [3, 6] о колебаниях жидкости в параболической чаше. Эта задача является нелинейной, двухмерной, а благодаря выбранному профилю дна, конкретный вид которого определяется из требования существования аналитического решения, не требует для решения дополнительных аппроксимаций, понижающих возможности ее применения, что делает ее уникальной [5].

Нами было расширено множество аналитических решений поставленной задачи путем учета совместного воздействия сил Кориолиса и донного трения. Затем были протестированы численные алгоритмы метода «Крупных частиц» [1, 2]. Верификация была проведена путем сравнения с точным решением. Полученные результаты могут оказаться полезными в дальнейших исследованиях при разработке и оптимизации алгоритмов расчета наката волн на берег.

Постановка задачи

Предположим, что движение подчиняется уравнениям теории мелкой воды, учитываются действие силы донного трения и вращение Земли (сила Кориолиса). Система координат – декартова, координатная плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной свободной поверхностью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + \tau u - fv &= 0; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \xi}{\partial y} + \tau v + fu &= 0; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi = \xi(x, y, t)$ – функция, задающая свободную поверхность; $H(x, y, t) = h(x, y) + \xi(x, y, t)$ – полная глубина; $h(x, y)$ – функция профиля дна, вид которой определяется далее; τ – параметр, характеризующий действие силы донного трения; $f = 2\omega \cos \varphi$ – параметр, характеризующий действие силы Кориолиса (ω – угловая скорость вращения Земли, φ – географическая широта); u, v – горизонтальные проекции вектора скорости в направлениях x, y соответственно. Стоит заметить, что форма «коэффициента трения» τ в литературе определяется неоднозначно. В нашей работе этот коэффициент является константой [4].

Аналитическое решение

Используя подход Ф.К. Болла [3], было принято предположение о характере движения, а затем определены необходимые условия для его реализации.

Интерес представляет простой случай, когда свободная поверхность является плоскостью (рис. 1) в любой момент времени:

$$\xi(x, y, t) = \xi_0(t) + \xi_1(t) \cdot x + \xi_2(t) \cdot y; \quad (2)$$

Другие варианты задания формы функции (2): к примеру, когда свободная поверхность имеет второй порядок или выше, при попытке найти решение, в котором колебания обладают конечной амплитудой, приводят к переопределению системы уравнений [6].

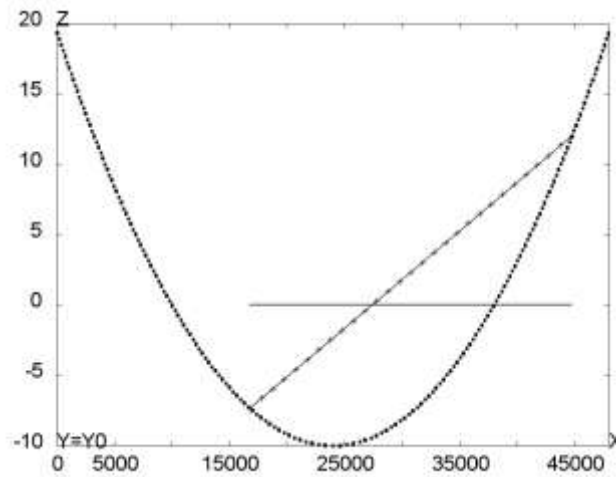


Рис. 1. Схема расчетной области: поверхность параболоида (пунктир), свободная поверхность (штриховая линия) и проекция свободной поверхности на плоскость, параллельную Oxz (сечение плоскостью $y = Y_0$)

Из уравнений (1) и (2) напрямую следует, что горизонтальные компоненты вектора скорости не зависят от пространственных переменных:

$$u = u(t), v = v(t). \quad (3)$$

т. е. горизонтальные проекции поперечных слоев жидкости движутся «как одна точка». Из того же допущения (2) следует, что:

$$h = h_0 \left(1 - \alpha (x - X_0)^2 - \beta (y - Y_0)^2 \right); \quad (4)$$

Таким образом, бассейн необходимо является поверхностью второго порядка. Пусть $\alpha, \beta > 0$; $\alpha = \beta = 1/a^2$ – параболоид вращения. Обозначим $X(t), Y(t)$ – координаты центра проекции свободной поверхности относительно (X_0, Y_0) . По предположению (2) $u = X'$, $v = Y'$. Функции свободной поверхности и полной глубины выражаются через новые переменные таким образом:

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{h_0}{a^2} \cdot (X^2 + Y^2) + \frac{2h_0 \cdot X}{a^2} \cdot (x - X_0) + \frac{2h_0 \cdot Y}{a^2} \cdot (y - Y_0); \\ H &= h_0 \left(1 - \frac{(x - X_0 - X)^2 + (y - Y_0 - Y)^2}{a^2} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения движения образуют линейную систему ОДУ:

$$X'' + \frac{2gh_0}{a^2} \cdot X + \tau \cdot X' - f \cdot Y' = 0; \quad Y'' + \frac{2gh_0}{a^2} \cdot Y + \tau \cdot Y' + f \cdot X' = 0. \quad (6)$$

Нами было предложено искать решение в виде линейной комбинации матричных экспонент, предварительно перейдя в новую систему координат, вращающуюся с постоянной угловой скоростью $-f/2$ относительно неподвижных осей.

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = e^{Mt} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} + e^{-Mt} \cdot \begin{pmatrix} K_3 \\ K_4 \end{pmatrix}; \quad (7)$$

После нахождения матрицы M несложными преобразованиями получено окончательное решение:

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = e^{(\frac{\alpha - \tau}{2})t} \cdot O \left(\frac{f}{2} - \beta \right) \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} + e^{(-\frac{\alpha - \tau}{2})t} \cdot O \left(\frac{f}{2} + \beta \right) \cdot \begin{pmatrix} K_3 \\ K_4 \end{pmatrix}; \quad (8)$$

здесь матрица $O(\omega) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}$, K_1, \dots, K_4 – произвольные вещественные константы, которые доопределяются из начальных условий. Задавались они в таком виде: в нулевой момент времени свободная поверхность отклоняется по оси абсцисс и отпускается без начальной скорости:

$$X(0) = A; \quad Y(0) = 0; \quad u(0) = 0; \quad v(0) = 0. \quad (9)$$

Движение «средней точки» проиллюстрировано на рис. 2.

Метод «крупных частиц»

Метод был разработан О.М. Белоцерковским и Ю.М. Давыдовым [1]. Его основная идея заключается в «расщеплении по физическим процессам».

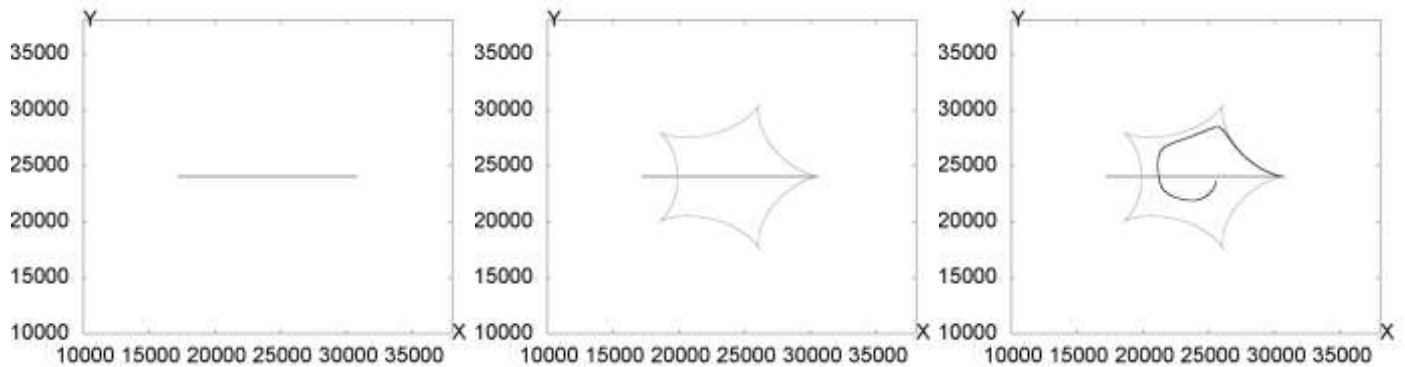


Рис. 2. Траектории движения «средней точки»: случай «а» ($f = 0s^{-1}, \tau = 0s^{-1}$) – слева; случаи «а» и «б» ($f = 15 \cdot 10^{-4} s^{-1}, \tau = 0s^{-1}$) – в центре; случаи «а», «б» и «с» ($f = 15 \cdot 10^{-4} s^{-1}, \tau = 5 \cdot 10^{-4} s^{-1}$) – справа.

На первом (эйлеровом) этапе в уравнениях мелкой воды (1) отбрасываются конвективные члены и система уравнений записывается либо в дивергентной форме (слева), либо в совершенно эквивалентной ей в недивергентной (справа):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial H}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial Hu}{\partial t} + gH \frac{\partial(H-h)}{\partial x} &= H(fv - \tau u), & \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial(H-h)}{\partial x} &= fv - \tau u, \\ \frac{\partial Hv}{\partial t} + gH \frac{\partial(H-h)}{\partial y} &= H(-fu - \tau v), & \frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial(H-h)}{\partial y} &= -fu - \tau v. \end{aligned} \quad (10)$$

На втором (лагранжевом) этапе в (1) сохраняются только конвективные члены:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{Q}u) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{Q}v) \right] &= 0, \quad (a) \\ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \left[u \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} \right] &= 0, \quad (b) \\ \bar{Q} &= (H, Hu, Hv). \end{aligned} \quad (11)$$

Для численного решения систем (11) для дивергентной формы (11a) используются консервативная противопотоковая схема, а недивергентной (11b) – неконсервативная с разностным аналогом уравнения неразрывности в консервативной форме.

Построенные схемы обладают первым порядком аппроксимации. В задачах наката профиль дна может быть негладким, и схемы высоких порядков в таких случаях могут оказаться непригодными. К достоинствам схем можно отнести отсутствие нефизических осцилляций, выполнение теста «озеро в покое» и т.п.

В работе [2] были построены три численных алгоритма на основе метода крупных частиц (LP). Консервативным (LP cons) назван алгоритм, в котором на втором этапе используется полностью консервативная схема. Неконсервативным (LP pcons) назван алгоритм, в котором схемы второго этапа неконсервативны. «Комбинированный» алгоритм (LP comb) является гибридной модификацией первых двух. В нём неконсервативная схема применяется только в малой окрестности Ω линии уреза, которая определялась из соотношения:

$$H_{i,j}^n \geq \delta \wedge (H_{i\pm 1,j}^n = 0 \vee H_{i,j\pm 1}^n = 0) \quad (12)$$

При численной реализации алгоритмов окрестность Ω было решено задавать соотношением:

$$H_{i,j}^n \leq \delta_1 \wedge H_{i\pm 1,j}^n \leq \delta_1 \wedge H_{i,j\pm 1}^n \leq \delta_1, \delta_1 \in [10\delta, 100\delta] \quad (13)$$

Комбинированный алгоритм был введен по причине того, что «вблизи линии уреза глубина воды и модуль количества движения очень малы», и это приводит к значительным ошибкам в определении вектора скорости [2].

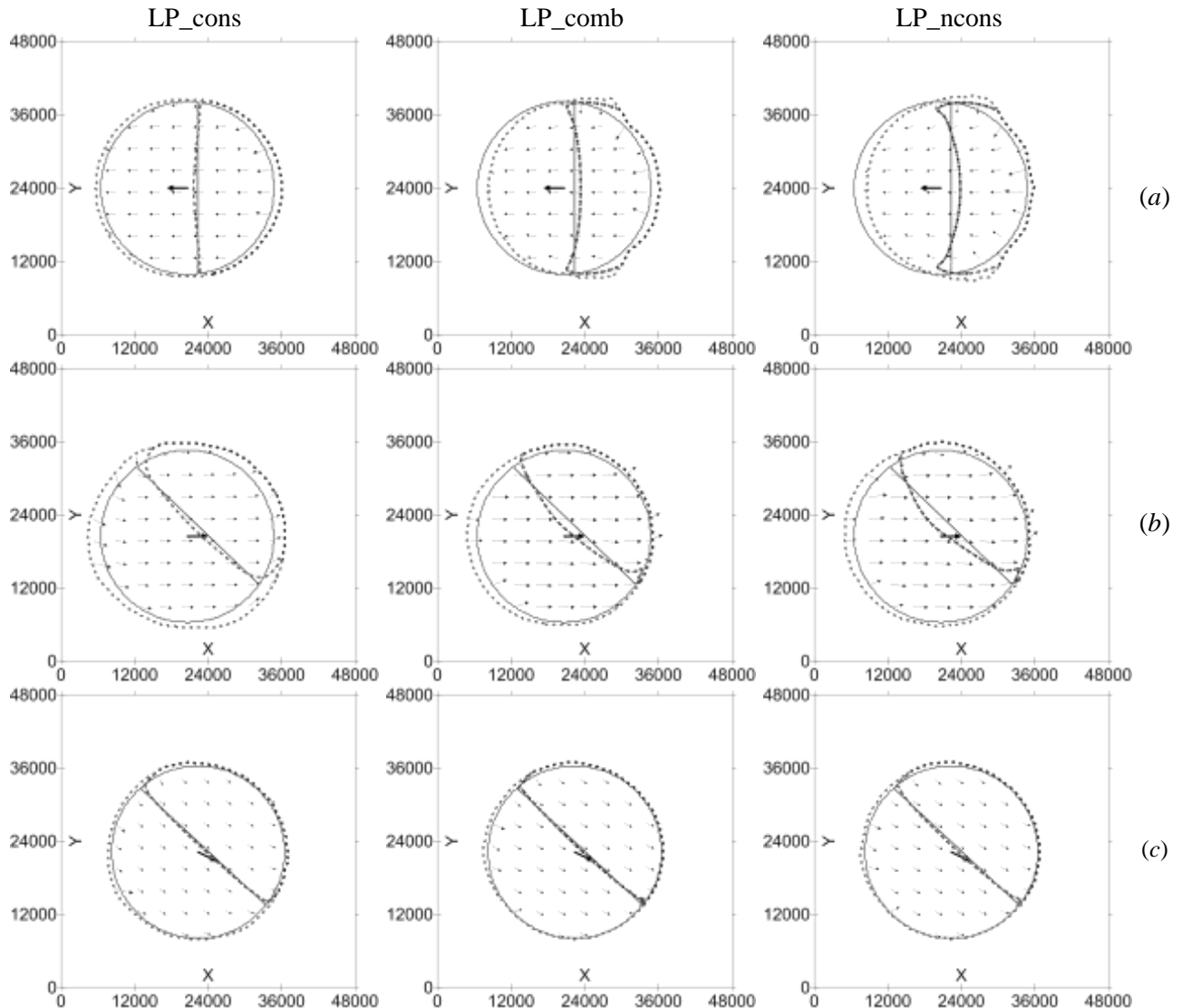


Рис. 3. Сравнение результатов расчетов и аналитических решений: линии уреза, поля скоростей и линии раздела повышения и понижения уровней на момент времени $t = 2T/3 \approx 8371s$: а) $f = 0s^{-1}, \tau = 0s^{-1}$,

б) $f = 15 \cdot 10^{-4}s^{-1}, \tau = 0s^{-1}$, в) $f = 15 \cdot 10^{-4}s^{-1}, \tau = 5 \cdot 10^{-4}s^{-1}$. Расчётные положения линий уреза – пунктир, точные – сплошная линия. Точные поля скорости нарисованы жирным по центру рисунков (вектор определяет все поле)

Верификация

Напомним, что профиль дна задавался функцией $h(x, y) = h_0[1 - (x - x_0)^2 / a^2 - (y - y_0)^2 / a^2]$. В расчетах использовались значения $h_0 = 10$ м, $x_0 = y_0 = 24000$, $a = 14000$ м. Рассматривались 3 случая движения: «а» ($f = 0s^{-1}, \tau = 0s^{-1}$), «б» ($f = 15 \cdot 10^{-4}s^{-1}, \tau = 0s^{-1}$) и «с» ($f = 15 \cdot 10^{-4}s^{-1}, \tau = 5 \cdot 10^{-4}s^{-1}$). Выбор значений f был обусловлен желанием придать движению в случаях «а» и «б» достаточно короткий общий период (в последнем случае движение не может быть периодическим ввиду наличия диссипации). В результате, для аналитического решения в случаях «а» и «б» получена полная картина движения. Из-за большого значения параметра τ период наблюдения $t > T$ также неинформативен и в случае «с».

Авторами была предпринята попытка решить основную проблему рассматриваемого класса задач – определение положения подвижной линии уреза. Наиболее удовлетворительную картину для

всех трех случаев движения предоставил консервативный алгоритм (рис. 3). Анализ погрешности по формуле (14) показал, что и здесь наилучшие результаты демонстрирует алгоритм LP_cons (рис. 4):

$$F_h^n = \max_{i,j,k} \frac{|H_{i,j}^k - H(i\Delta x, j\Delta y, t^k)|}{h_0}; \quad i, j = 0, \dots, N, k \leq n \quad (14)$$

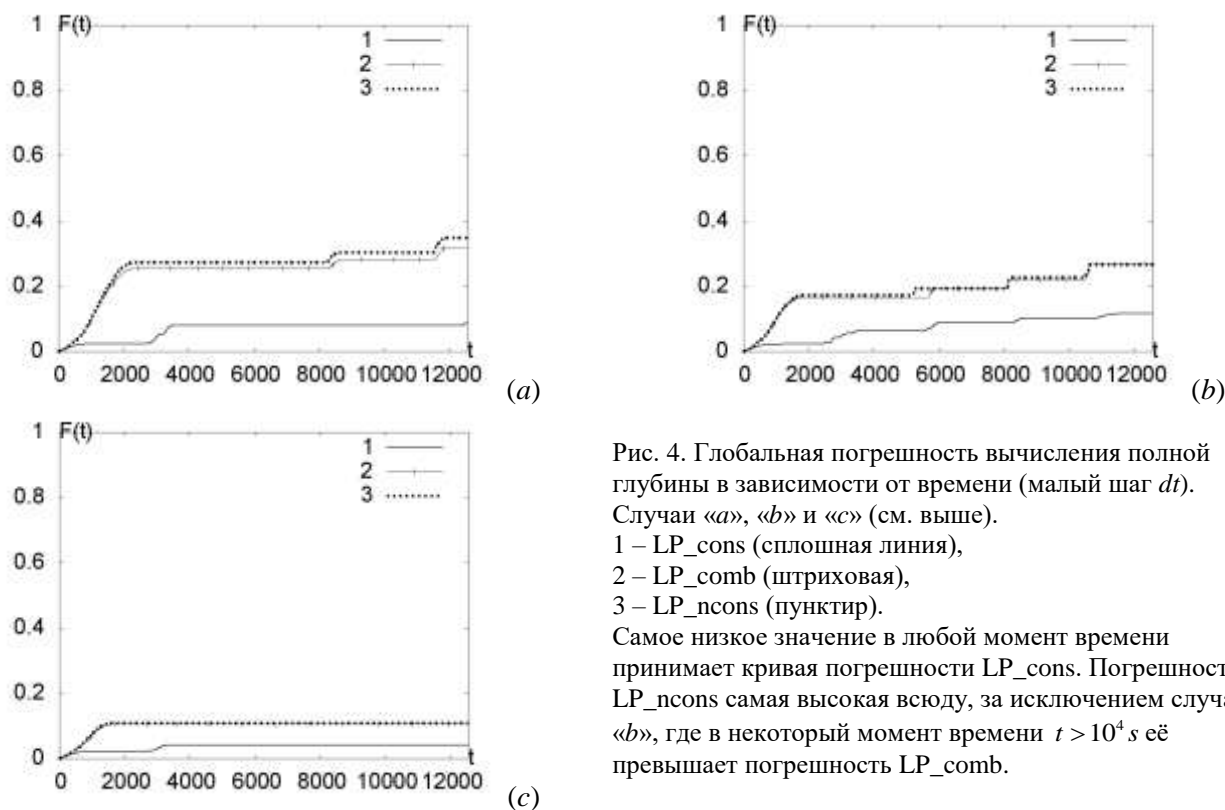


Рис. 4. Глобальная погрешность вычисления полной глубины в зависимости от времени (малый шаг dt).
Случаи «а», «б» и «с» (см. выше).
1 – LP_cons (сплошная линия),
2 – LP_comb (штриховая),
3 – LP_pcons (пунктир).
Самое низкое значение в любой момент времени принимает кривая погрешности LP_cons. Погрешность LP_pcons самая высокая всюду, за исключением случая «б», где в некоторый момент времени $t > 10^4$ s её превышает погрешность LP_comb.

Заключение

В докладе предоставлена методология нахождения точных решений уравнений мелкой воды без линеаризации и других упрощений; получены аналитические решения для случая плоской свободной поверхности, как с учётом донного трения и вращения Земли, так и без него. Выполнена верификация алгоритмов метода «крупных частиц» путем сравнения с точным решением. Безусловно, работа каждого из алгоритмов нуждается в дальнейших совершенствованиях. Так, к примеру, авторами рассматриваются способы улучшить «физичность» комбинированной версии алгоритма путем учета интегральных законов сохранения массы и энергии. Планируется также исследовать возможности альтернативных критериев определения «области неконсервативности».

В планах на ближайшее будущее также провести исследование для иных форм акватории; найти точные решения для более сложных типов движения; рассмотреть другие формы задания «коэффициента трения»; и, используя новые точные решения, более детально проанализировать «слабые места» алгоритмов для их последующей модификации.

Список литературы

1. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука. 1982. 392 с.
2. Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Рычков А.Д., Чубаров Л.Б. Численное моделирование наката волн цунами на побережье с использованием метода крупных частиц // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 1. С. 99–112.
3. Ball F.K. An exact theory of simple finite shallow water oscillations of a rotating earth // Hydraulics and Fluid Mechanics. Nedlands: Pergamon. 1964. P. 293–305.
4. Sampson J. A numerical solution for moving boundary shallow water flow above parabolic bottom topography // Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal. 2009. № 50. P. C898–C911.
5. Sielecki A., Wurtele M. The numerical integration of the nonlinear shallow-water equations with sloping boundaries // Journal of Computational Physics. 1970. № 6. P. 219–236.
6. Thacker W.C. Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // Journal of Fluid Mechanics. 1981. № 107. P. 499–508.