ВУЛКАНОЛОГИЯ И СЕЙСМОЛОГИЯ

1982 № 5

УДК 550.34

ГУСЕВ А. А., ПАВЛОВ В. М.

МЕТОД СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОЧАГЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ ПО ЕГО ИЗЛУЧЕНИЮ

Введение

В настоящей статье рассматриваются вопросы, относящиеся к общей проблеме восстановления (реконструкции) движений в очаге тектонического землетрясения по сейсмическим записям. Накопленный сейсмологией опыт позволяет считать, что, как правило, в очаге тектонического землетрясения происходит процесс развития разрыва сплошности в материале Земли, т. е. трещины или системы трещин. Мы, однако, будем следовать обычному упрощающему предположению и допустим, что очаг есть плоская сдвиговая трещина в упругой среде, хотя реально возможен и частичный отрыв, и неплоская поверхность разрыва, и развитие пластической деформации. (Проблемы характеризации сейсмических источников наиболее общего типа обсуждаются Г. Бэкусом и М. Малкаи [14, 15].)

Основной характеристикой очага как источника сейсмического излучения можно в таком случае считать величину вектора $B_i(\mathbf{x}, t)$ относительного перемещения берегов (стенок) разрыва как функцию времени t и положения точки $\mathbf{x}$ на разрыве. Альтернативно можно искать поверхностную плотность $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$ тензора эквивалентного упругого диполя. Обратной кинематической задачей тогда является задача восстановления функции очага $B_i(\mathbf{x}, t)$ или $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$ по наблюдениям волнового поля на поверхности Земли, включая поле ближней зоны, объемные и поверхностные волны и собственные колебания. В принципе можно ставить и динамическую обратную задачу — задачу восстановления напряжений в области очага как функции времени и пространственных координат, но мы не будем ее рассматривать.

Обратная кинематическая задача для очага землетрясения рассматривалась ранее различными авторами как с теоретической, так и с практической точки зрения, причем первоначально она была рассмотрена именно с последней. В рамках представлений об очаге как о плоской дислокации Н. Хаскелл [22] сформулировал модель узкого прямоугольного очага, в котором подвижка достигала предельного значения мгновенно с приходом фронта дислокации. При известной ориентации площадки и известном направлении подвижки модель полностью определяется четырьмя подгоняемыми параметрами: размерами вдоль L и поперек W площадки, скоростью фронта разрыва v (предполагается, что фронт — отрезок прямой, параллельный меньшей стороне прямоугольника) и величиной подвижки B. Интерпретация в рамках этой модели часто ведется в предположении $L \gg W$, тогда реально остаются только три параметра.

Аналогичная модель использовалась ранее в работах Ф. Пресса и А. Бен-Менахема с сотр. (см., например, [25]), в которых интерпретация поверхностных волн проводилась в терминах бегущего точечного силового диполя. Методику интерпретации таких наблюдений в рамках модели Н. Хаскелла предложил К. Аки [11]. Для объемных волн от глубоких землетрясений применение дислокационных моделей для интерпретации было предложено А. Бен-Менахемом, С. Смитом и Г. Тенгом [17] и проведено Г. Беркхеммером и К. Якобом [18]. Наконец. Дж. Брун [19], У. Тэтчер и Т. Хэнкс [28] применили подобный подход к записям близких землетрясений. Подгонка параметров дислокационных моделей типа Хаскелла — Аки и им подобных оказалась весьма успешной и широко применяется до сих пор. Однако вскоре обнаружилось, что подгонка может быть успешно проведена в рамках различных модельных функций источника [13, 24], так что вопрос выбора параметрической модели очага оказался открытым.

Надо отметить, что физически более оправданной параметрической моделью является модель трещины. Статический вариант модели предложен В. Кейлис-Бороком [23]. Затем Дж. Сэвидж [27] предложил компромиссную кинематическую модель, в которой по эллиптической площадке бежит круговая дислокационная ступенька. Следующим шагом явилась модель Т. Сато и Т. Хирасава [26], в которой функция $B_i(\mathbf{x}, t)$ неявно принималась в согласии с решением динамической задачи (см., например, [7]) вплоть до начала торможения. Модели этого класса, по-видимому, более оправданны, но они сохраняют параметрический характер.

Сущность проблемы, как отметил К. Аки [12], сводится к тому, что при ограниченном объеме наблюдений число свободных параметров задачи должно быть согласовано с числом степеней свободы данных. И хотя параметрические модели очень удобны при небольшом объеме исходных данных, они имеют априорный характер, а нередко физически недопустимы. Таковы, в частности, модели Хаскелла — Аки и Брюна что отметил Б. В. Костров [16, с. 136]. Большой интерес поэтому представляет непараметрический подход к восстановлению процесса в очаге. Хотя он и не позволяет «выпрыгнуть» за принципиальные ограничения, связанные с объемом и точностью данных, на этом пути есть по крайней мере принципиальная возможность преодолеть ограниченность подхода, использующего модельные функции источника.

Первым шагом в этом направлении была работа Б. В. Кострова [6]. В ней для идеализированного случая, когда поле объемных волн от излучателя в виде плоской трещины в однородной среде известно для всех точек удаленной сферы, окружающей источник, была рассмотрена обратная задача о восстановлении функции подвижки дислокационного источника. В отличие от предыдущих авторов Б. В. Костров исследовал возможность определения подвижки как функции без предположения об известном функциональном виде. Оказалось, что такая обратная задача аналогична задаче синтеза антенны и, будучи единственно разрешимой, является неустойчивой. Последнее означает, что в пределах точности наблюдений даже «полные» наблюдательные данные могут быть подогнаны существенно различающимися функциями подвижки. Было, в частности, показано, что геометрические размеры очага, излучающего наблюденное поле объемных волн, могут иметь произвольные значения, даже если это поле известно с как угодно высокой, но ограниченной точностью. Неустойчивость в данном случае связана с необходимостью аналитического продолжения спектра — преобразования Фурье от функции скорости подвижки — для каждого значения частоты ω на все двумерное пространство волновых чисел κ_1, κ_2 из круга $\kappa_1^2+\kappa_2^2\leqslant\omega^2/c_{P,S}^2$, на котором в принципе может быть определен спектр из наблюдений.

Более поздние работы не затрагивают принципиальную сторону проблемы устойчивости обратной задачи. Эта проблема, конечно, не ограничена случаем объемных волн в однородной среде, а имеет вполне общий характер. В данной работе будет сделана попытка продвинуться в направлении ее разрешения.

Постановка задачи и план работы. Как известно [9, 6, с. 20], чтобы сделать обратную задачу устойчивой, необходимо привлечь дополнительную информацию об искомом решении. Другой путь состоит в том, чтобы изменить постановку математической задачи таким образом, чтобы она, оставаясь осмысленной, была бы устойчиво разрешимой. Далее мы попытаемся реализовать именно этот путь. Мы предлагаем рассматривать обратную кинематическую задачу очага как задачу определения функции, отражающей крупномасштабные детали движения в источнике («сглаженный очаг»). Такая функция — результат низкочастотной фильтрации (сглаживания) функции подвижки. При ее определении в случае обратной задачи для объемных волн спектр функции источника нужно продолжить лишь на ограниченную окрестность нуля, что в принципе можно выполнить устойчиво. В случае, когда пространственно-временные размеры очага известны, прямой путь решения обратной задачи заключается, по-видимому, в минимизации различий между наблюденными смещениями и смещениями, полученными расчетом по плоской модели источника с функцией, записанной в виде конечного отрезка трехмерного ряда по подходящей системе базисных функций. Минимизация осуществляется выбором системы коэффициентов названного ряда. Эта задача линейна, и с формальной стороны ее решение непосредственно ведет к искомому результату.

Мы, однако, предпочли обходный путь, для которого анализ задачи удается провести более полно. Причем существенная проблема определения размеров очага в этом случае решается попутно. Наш подход к решению обратной задачи использует введение набора интегральных характеристик функции источника, который, с одной стороны, может быть устойчиво определен из наблюдений, а с другой стороны, полностью в некотором смысле характеризует функцию источника. Такими интегральными характеристиками являются степенные моменты функции очага — моменты от плотности упругого диполя, введенные Г. Бэкусом и М. Малкаи [14], или имеющие меньшую общность степенные моменты модуля функции скорости подвижки $B_i(\mathbf{x}, t)$, введенные авторами [3]. Заметим, что идея введения степенных моментов ранее высказывалась Ф. М. Гольцманом [4] для характеризации «мнимого» источника отраженных волн. Степенные моменты очага в принципе могут быть определены из амплитуд собственных колебаний Земли [14, 15] или из поля объемных волн в дальней зоне [3].

При дополнительном постулате знакопостоянства (например, положительности) функции источника Г. Бэкус [16] и несколько позже авторы [3] указали на возможность определения размеров, длительности и ряда других характеристик очага по известным моментам порядков 1 и 2. Конечный набор всех степенных моментов до некоторого порядка, как показано в [14], определяет сглаженное поле смещений, возбужденное источником в окружающей его среде. При этом функция источника, т. е. решение обратной задачи, не может быть восстановлена однозначно, поскольку для этого необходима вся бесконечная совокупность ее степенных моментов. В связи с этим в работе [8] авторы предложили опирающийся на использование конечного набора всех моментов до некоторого порядка способ восстановления «сглаженного очага».

Таким образом, сформулированная обратная задача для очага землетрясения может быть решена в два этапа. На первом этапе ищутся степенные моменты несглаженного источника, на втором по моментам с привлечением гипотезы положительности функции источника определяются размеры, а затем сглаженная функция источника. Ниже будет показано, как это можно выполнить для модельной задачи, когда считаются известными данные об объемных волнах в дальней зоне в однородной среде. Изложение частично повторяет ранее опубликованные краткие сообщения авторов [3, 8] по данному вопросу.

Некоторые определения и обозначения. Мы будем рассматривать степенные моменты финитных по всем переменным функций $\Phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\varphi(x_1, x_2, t)$ четырех и трех переменных соответственно. Степенные моменты этих функций относительно точек $(\boldsymbol{\eta}, \tau)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и (η_1, η_2, τ) соответственно определяются как интегралы вида

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(\boldsymbol{\eta}, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{x}, t)\,(x_1 - \eta_1)^{\alpha}(x_2 - \eta_2)^{\beta}(x_3 - \eta_3)^{\gamma} \times \times (t - \tau)^{\delta}\, dx_1 dx_2 dx_3 dt,$$

$$M_{\alpha\beta\gamma}(\eta_1, \eta_2, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, t)\,(x_1 - \eta_1)^{\alpha}(x_2 - \eta_2)^{\beta} \times \times (t - \tau)^{\gamma}\, dx_1 dx_2 dt.$$

Моменты относительно начала координат обозначаются через $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $M_{\alpha\beta\gamma}$ соответственно. Сумма индексов при $M_{\alpha\beta\gamma\delta}$ или $M_{\alpha\beta\gamma}$ называется порядком момента. Мы будем использовать нормированные моменты, которые получаются после деления моментов на момент нулевого порядка. Будем обозначать нормированные моменты верхним индексом «н». Так, например,

$$M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = M_{\alpha\beta\gamma\delta}/M_{0000}.$$

Для функции $F(\mathbf{x})$ от n переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ введем преобразование Фурье обычным образом:

$$\hat{F}(\mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}\, d^n\mathbf{x},$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — интеграл берется по всем переменным от $-\infty$ до ∞, а $\mathbf{x}\cdot\mathbf{k} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i k_i$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{k}$.

Функция $F(\mathbf{x})$ выражается через $\hat{F}(\mathbf{k})$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\mathbf{k})\, e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}\, d^n\mathbf{k}.$$

Свертка двух функций $F(\mathbf{x})$ и $G(\mathbf{x})$ определяется формулой

$$F * G(\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{y})\, G(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d^n\mathbf{y}.$$

Преобразование Фурье переводит свертку в произведение

$$\widehat{F * G}(\mathbf{k}) = \hat{F}(\mathbf{k})\, \hat{G}(\mathbf{k}).$$

Если преобразование Фурье будет применяться к функциям времени, то в качестве аргумента преобразованной функции будет использоваться ω.

1. Описание источника

Как было недавно показано в [14, 15], сейсмический источник наиболее общего типа феноменологически может быть описан как совокупность элементарных дипольных источников, распределенных в пространстве и времени, с некоторым тензорным дипольным моментом $m_{ij}(\mathbf{x}, t)dVdt$ $(ij=1, 2, 3)$. Причем плотность дипольного момента является симметричным тензором.

Мы рассматриваем частный тип источников, которые представляют собой разрыв сплошности материала Земли. Представление об очаге землетрясения как о разрыве сплошности (трещине) является весьма распространенным (см., например, [6]). Пусть разрыв сплошности охватывает некоторую поверхность Σ с нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$. Обозначив вектор относительного смещения берегов разрыва через $B_i(\mathbf{x}, t)$ и предполагая, что разрыв происходит в изотропной, однородной, упругой среде, для $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$ имеем выражение [6]

$$m_{ij}(\mathbf{x}, t)=[\lambda B(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)\delta_{ij}+\mu(n_i(\mathbf{x}, t)B_j(\mathbf{x}, t)+ +n_j(\mathbf{x}, t)B_i(\mathbf{x}, t))]\delta_\Sigma(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

где λ, μ — коэффициенты Ламе, а $\delta_\Sigma(\mathbf{x})$ — поверхностная дельта-функция.

Здесь и далее мы будем предполагать, что разрыв начинается в одной точке (гипоцентре) и что система отсчета $\mathbf{x}$, t выбрана так, что начало декартовой системы координат помещено в гипоцентр, а момент начала разрыва (время в очаге) соответствует $t=0$. Кроме того, мы принимаем следующие допущения.

1. Поверхность Σ является плоскостью. Такое допущение может быть оправдано тем, что в случае выхода разрыва на поверхность линия разрыва часто близка к прямолинейной. Поскольку начало координат находится в гипоцентре, то уравнение плоскости очага Σ можно записать в виде $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}=0$, где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к Σ.

2. Направление вектора $B_i(\mathbf{x}, t)$ остается неизменным независимо от положения точки на разрыве и времени, т. е.

$$B_i(\mathbf{x}, t)=B(\mathbf{x}, t)b_i, \quad b_i\equiv\mathrm{const} \quad (i=1, 2, 3).$$

Это условие можно считать приближенно выполненным, поскольку землетрясение является актом тектонического деформирования, направление которого задано полем напряжений более крупного масштаба, чем размер самого очага, а поэтому в пределах очага направление вектора $B_i(\mathbf{x}, t)$, вероятно, устойчиво. Кроме того, направление подвижки, определяемое при выходе разрыва на поверхность Земли методами полевой геологии, обычно мало меняется вдоль сейсмического разлома.

3. Разрыв является чисто сдвиговым, т. е. вектор b_i лежит в плоскости Σ и поэтому $\mathbf{bn}=0$. Для разрыва вдоль гладкой плоскости, причем в условиях обжатия литостатическим давлением, такое предположение естественно. Следует отметить, что реальные разломы шероховаты и при движении возможен и даже вероятен временный и (или) локальный отрыв, которым мы в данном случае пренебрегаем.

4. Величина скорости подвижки $\dot{B}(\mathbf{x}, t)$ не меняет знака для всех $\mathbf{x}$ и t, и принимается, что $\dot{B}(\mathbf{x}, t)\geqslant 0$. Это условие означает, что процесс смещения в очаге является монотонно нарастающим, т. е. отсутствует обратное проскальзывание. Косвенное указание на это можно найти в однополярности P- и S-импульсов от глубоких землетрясений (см., например, [21]). В пользу этого предположения говорит также общая успешность подгонки временной функции источника сглаженной ступенькой для больших и малых, поверхностных и глубоких землетрясений.

Предположения 1—3 достаточно традиционны [6, 12]. Менее обычное предположение 4 является ключевым для оценки пространственно-временных размеров очага. При сделанных предположениях тензор (1) принимает вид

$$m_{ij}(\mathbf{x}, t)=m_{ij}^{(0)}\cdot f(\mathbf{x}, t), \qquad (2)$$

где

$$m_{ij}^{(0)} = M_0 (n_i b_j + n_j b_i), \tag{3}$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{LWT} B_{\text{Н}}(\mathbf{x}, t)\, \delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}); \tag{4}$$

причем

$$B_{\text{Н}}(\mathbf{x}, t) = B(\mathbf{x}, t)/B_{\text{ср}}; \quad B_{\text{ср}} = \frac{1}{LWT} \int_0^{\infty} \int_{\Sigma} \dot{B}(\mathbf{x}, t)\, dS dt = \frac{M_0}{\mu LWT};$$

$$M_0 = \mu \int_{\Sigma} B(\mathbf{x}, \infty)\, dS;$$

L, W — геометрические размеры очага; T — длительность процесса движения в очаге; M_0 — скалярный сейсмический момент; μ — модуль сдвига; $\delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})$ — дельта-функция Дирака от аргумента $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}$.

В дальнейшем мы будем использовать не сам тензор $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$, а его производную по времени $\dot{m}_{ij}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial m_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$. С формальной точки зрения использование $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$ или $\dot{m}_{ij}(\mathbf{x}, t)$ эквивалентно, поскольку $m_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \dot{m}_{ij}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau$. Это соотношение выполнено в силу того, что $m_{ij}(\mathbf{x}, 0) \equiv 0$ по предположению о моменте начала процесса движений в очаге. Из формулы (2) следует, что

$$\dot{m}_{ij}(\mathbf{x}, t) = m_{ij}^{(0)} \dot{f}(\mathbf{x}, t). \tag{5}$$

Таким образом, при сделанных предположениях тензор $\dot{m}_{ij}(\mathbf{x}, t)$ представляется в виде произведения постоянной тензорной части $m_{ij}^{(0)}$ и скалярной функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$. Оказывается, что обратная задача определения тензора $\dot{m}_{ij}(\mathbf{x}, t)$ по наблюдениям может быть разбита на две независимые задачи определения $m_{ij}^{(0)}$ и $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$.

Задача определения $m_{ij}^{(0)}$ заключается в определении скалярного сейсмического момента M_0 и тензора механизма $n_i b_j + n_j b_i$. Эта задача достаточно хорошо изучена, и мы на ней не будем останавливаться. Мы сконцентрируем внимание на возможности определения по наблюдательным данным функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$.

Мы будем рассматривать функцию $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ в общем случае, когда ориентация плоскости очага неизвестна. Если же ориентация плоскости очага определена (ниже показывается, как это может быть сделано), то рассматривается функция $\dot{B}_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$. Заметим, что эта функция безразмерна. Будем называть $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ и $\dot{B}_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)$ функциями очага.

Заметим, что с формальной точки зрения очаг — это пространственно-временная область, являющаяся носителем функции источника $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$, т. е. множеством точек $(\mathbf{x}, t)$, для которых $\dot{f}(\mathbf{x}, t) \neq 0$. В силу предположения положительности $\dot{B}(\mathbf{x}, t)$ (а значит, и $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$) максимальная пространственная область, испытавшая разрыв (статический очаг), является носителем функции

$$f(\mathbf{x}, \infty) = \int_0^{\infty} \dot{f}(\mathbf{x}, t)\, dt.$$

Поскольку реально процесс движения в очаге является конечным и охватывает ограниченную пространственную область, то функции динамического $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ и статического $f(\mathbf{x}, \infty)$ очагов финитны (т. е. имеют ограниченные носители).

2. Степенные моменты функции очага

Рассмотрим степенные моменты функции очага

$$\dot{f}(\mathrm{x},\, t) = \frac{1}{LWT}\, \dot{B}_{\mathrm{H}}(\mathrm{x},\, t)\, \delta(\mathrm{x}\cdot n). \tag{6}$$

Для финитной функции знание бесконечной совокупности всех степенных моментов формально эквивалентно знанию самой функции [5]. Реально же можно оперировать лишь с конечной совокупностью. Однако, как оказалось, [16, 3], уже нормированные моменты первого и второго порядков позволяют получить полезную информацию о геометрии и кинематике очага землетрясения. В частности, при положительной функции очага оцениваются геометрические размеры и длительность процесса движения в очаге. Кроме того, конечная совокупность степенных моментов функции источника, как показано ранее авторами [8], позволяет определить сглаженную функцию источника, т. е. результат низкочастотной фильтрации.

Для удобства рассмотрения для нормированных моментов первого и второго порядков от функции $f(x,\, t)$ введем обозначения (момент нулевого порядка равен единице):

$$\begin{gathered} M_i^{\mathrm{н}} = \int_0^\infty \int_V x_i \dot{f}(\mathrm{x},\, t)\, dV dt = \int_V x_i f(\mathrm{x},\, \infty)\, dV, \\ M_{ij}^{\mathrm{н}} = \int_0^\infty \int_V x_i x_j \dot{f}(\mathrm{x},\, t)\, dV dt = \int_V x_i x_j f(\mathrm{x},\, \infty)\, dV \quad (i,\, j = 1,\, 2,\, 3) \end{gathered} \tag{7}$$

— пространственные моменты;

$$\begin{gathered} M_t^{\mathrm{н}} = \int_0^\infty \int_V t \dot{f}(\mathrm{x},\, t)\, dV dt, \quad M_{tt}^{\mathrm{н}} = \int_0^\infty t^2 \dot{f}(\mathrm{x},\, t)\, dV dt, \\ M_{it}^{\mathrm{н}} = \int_0^\infty \int_V t x_i \dot{f}(\mathrm{x},\, t)\, dV dt \quad (i = 1,\, 2,\, 3) \end{gathered} \tag{8}$$

— временные и смешанные моменты. В этих формулах V — пространственная область, содержащая очаг. Вектор пространственных нормированных моментов первого порядка $M_i^{\mathrm{н}}$ определяет положение пространственного «центра тяжести», а $M_t^{\mathrm{н}}$ — момент времени, соответствующий «временному центру тяжести» очага, поскольку степенные моменты относительно точки $x_i^{\mathrm{ц}} = M_i^{\mathrm{н}}$, $x_t = M_t^{\mathrm{н}}$ равны нулю:

$$\int_0^\infty \int_V (x_i^{\mathrm{ц}} - M_i^{\mathrm{н}})\, \dot{f}(\mathrm{x},\, t)\, dV dt = M_i - M_i \equiv 0,$$

$$\int_0^\infty \int_V (t - M_t^{\mathrm{н}})\, \dot{f}(\mathrm{x},\, t)\, dV dt = M_t - M_t \equiv 0.$$

Степенные моменты относительно «центров тяжести» (пространственного и временного) будем называть центральными моментами и обозначать верхним индексом «ц». Центральные нормированные моменты второго порядка выражаются через начальные по формулам

$$M_{ij}^{\mathrm{нц}} = M_{ij}^{\mathrm{н}} - M_i^{\mathrm{н}} M_j^{\mathrm{н}}; \quad M_{it}^{\mathrm{нц}} = M_{it}^{\mathrm{н}} - M_i^{\mathrm{н}} M_t^{\mathrm{н}};$$

$$M_{tt}^{\mathrm{нц}} = M_{tt}^{\mathrm{н}} - (M_t^{\mathrm{н}})^2.$$

Покажем, как по совокупности центральных пространственных моментов $M_i^{нц}$ можно определить ориентацию плоскости очага, а также геометрические размеры очага.

С этой целью рассмотрим выражение (здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до 3)

$$R_l^2 = M_{ij}^{нц} l_i l_j \ (\geqslant 0 \ \text{в силу} \ \dot{f}(\mathbf{x}, t) \geqslant 0),$$

где l_i — компоненты единичного вектора. Это выражение может быть преобразовано к виду

$$R_l^2 = M_{ij}^{нц} l_i l_j = \int\limits_V f(\mathbf{x}, \infty)\, x_i^ц x_j^ц l_i l_j \, dV = \int f(\mathbf{x}, \infty)\, (x_l^ц)^2 \, dV,$$

где $x_l = x_i l_i$ — координата вдоль линии с направляющим вектором l_i. Величина R_l имеет размерность длины и является среднеквадратическим радиусом очага — характеристикой размера очага в направлении l_i.

Приведем тензор $M_{ij}^{нц}$ к главным осям, что равносильно определению направлений единичного вектора $\mathbf{l}$, для котрых значения R_l^2 будут экстремальны. Компоненты направляющих векторов главных осей тензора $M_{ij}^{нц}$ удовлетворяют системе уравнений

$$(M_{ij}^{нц} - \lambda \delta_{ij})\, l_j = 0, \tag{9}$$

где λ — параметр, который определяется из уравнения $\det(M_{ij}^{нц} - \lambda \delta_{ij}) = 0$. Это уравнение третьего порядка относительно λ и имеет три вещественных корня в силу симметричности матрицы $M_{ij}^{нц}$. Обозначим корни в порядке убывания $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant 0$. Величины λ_i являются собственными значениями тензора $M_{ij}^{нц}$, а соответствующие собственные векторы $l_i^{(1)}$, $l_i^{(2)}$, $l_i^{(3)}$ находятся из уравнений (9) и определяют направление главных осей тензора $M_{ij}^{нц}$. Систему декартовых координат x_1^c, x_2^c, x_3^c, которая определяется тройкой векторов $\mathbf{l}^{(1)}$, $\mathbf{l}^{(2)}$, $\mathbf{l}^{(3)}$, назовем с о б с т в е н н о й системой координат для очага землетрясения. Моменты в этой системе координат будут обозначаться верхним индексом *с*.

В собственной системе координат пространственные моменты с несовпадающими индексами равны нулю, т. е.

$$M_{ij}^{нцс} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Для ненулевых компонент $M_{ij}^{нцс}$ имеют место равенства

$$M_{11}^{нцс} = \lambda_1, \qquad M_{22}^{нцс} = \lambda_2, \qquad M_{33}^{нцс} = \lambda_3.$$

Поскольку очаг расположен на плоскости, т. е. функция $\dot{f}(x, t)$ имеет вид (6), то, как легко проверить, $R_n^2 = 0$. Это значит, что минимальное собственное значение $\lambda_3 = 0$. Поэтому вектор нормали к плоскости очага совпадает с собственным вектором $\mathbf{l}^{(3)}$, т. е. вектор $\mathbf{l}^{(3)}$ определяет ориентацию плоскости очага. Таким образом, в собственной системе координат уравнение плоскости очага принимает вид $x_3^c = 0$, и поэтому все степенные моменты функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ по координате x_3^c равны нулю. Заметим, что нормированные степенные моменты функции $\dot{f}(\mathbf{x}^c, t)$ и $\dot{B}_н(x_1^c, x_2^c, t)$ по координатам x_1^c, x_2^c, t совпадают, поскольку на плоскости очага эти функции пропорциональны друг другу согласно определению (6).

Среднеквадратические радиусы

$$R_1 \equiv R_{l(1)} = \sqrt{M_{11}^{нцс}}, \quad R_2 \equiv R_{l(2)} = \sqrt{M_{22}^{нцс}} \tag{10}$$

характеризуют размеры очага на плоскости в длину и ширину соответственно. При этом вектор $\mathbf{l}^{(1)}$ определяет направление, вдоль которого протяженность очага наибольшая, а $\mathbf{l}^{(2)}$ — направление, вдоль которого протяженность очага наименьшая. Отношение R_1/R_2 характеризует степень вытянутости очага.

Аналогичным образом можно охарактеризовать длительность процесса движения в очаге, введя «среднеквадратическую длительность» $R_t=\sqrt{M_{tt}^{\text{нцс}}}$. Моменты $M_{11}^{\text{нцс}}$, $M_{22}^{\text{нцс}}$, $M_{tt}^{\text{нц}}$, $M_{1t}^{\text{нцс}}$, $M_{2t}^{\text{нцс}}$ можно рассматривать как аналоги дисперсий и ковариаций. При этом величины

$$\rho_1=M_{1t}^{\text{нцс}}/R_1R_t, \qquad \rho_2=M_{2t}^{\text{нцс}}/R_2R_t$$

аналогичны коэффициентам корреляции, если x_1^c, x_2^c и t рассматривать как случайные величины, а $\dot{B}_{\text{н}}(x_1^c, x_2^c, t)$ — как плотность их совместного распределения. Они характеризуют степень односторонности процесса вспарывания очага в длину (ρ_1) и ширину (ρ_2). Как известно из курса теории вероятностей (см., например, [2]), величины ρ_k ($k=1$, 2) удовлетворяют неравенству $|\rho_k|\leqslant 1$, причем знак равенства имеет место только в случае линейной зависимости случайных величин x_k^c и t ($k=1$, 2).

Чем ближе $\rho_1(\rho_2)$ к единице, тем более односторонним является процесс разрыва в очаге, т. е. фронт разрыва распространяется преимущественно в одну сторону вдоль оси $x_1^c(x_2^c)$, а движение берегов все более локализуется в окрестности фронта. Пусть, например, $\rho_1=1$, тогда

$$\dot{B}_{\text{Н}}\,(x_1^c,\, x_2^c,\, t)=F\,(x_2^c)\,\delta\,(Gx_1^c+Ht) \tag{11}$$

и, следовательно, все движение в направлении x_1^c сосредоточено в окрестности фронта, а фронт распространяется от места начала вспарывания в направлении $x_1^c\operatorname{sign}(-HG^{-1})$ (H и G — константы).

Другой характеристикой односторонности может служить относительное положение точки начала вспарывания (гипоцентра) и «центра тяжести», которое можно характеризовать величинами

$$\chi_1=d_1/R_1,\ \chi_2=d_2/R_2, \tag{12}$$

где d_k — проекция $M_i^{\text{н}}$ на $l_i^{(k)}$, т. е. $d_k=l_i^{(k)}\cdot M_i^{\text{н}}$ ($k=1$, 2). Введенные характеристики очага являются интегральными и отражают его самые общие свойства. В рамках конкретных параметрических моделей очага их легко рассчитать. Для иллюстрации в таблице приведены формулы, дающие связь с параметрами модели для двух простых моделей очага.

Моменты и производные величины для двух моделей источника *

Параметры	Модель 1	Модель 2	Параметры	Модель 1
$M_1^{\text{н}}$	l	l	$M_t^{\text{н}}$	$L\,(1+\varkappa^2)/4\,v$
$M_{11}^{\text{н}}$	$L^2\,(1+3\,\varkappa^2)/12$	$l^2+a^2/5$	$M_{tt}^{\text{н}}$	$L^2\,(1+3\,\varkappa^2)/12\,v^2$
$M_{11}^{\text{н c}}$	$L^2/12$	$a^2/5$	$M_{tt}^{\text{нцс}}$	$L^2\,(1+6\,\varkappa^2-3\,\varkappa^4)/48\,v^2$
$M_{22}^{\text{н}}=M_{22}^{\text{нцс}}$	$W^2/12$	$b^2/5$	R_t	$L\sqrt{1+6\,\varkappa^2-3\,\varkappa^4}/4\sqrt{3}\,v$
R_1	$L/\sqrt{12}$	$a/\sqrt{5}$	$M_{1t}^{\text{нцс}}$	$L^2\varkappa\,(3-\varkappa^2)/24\,v$
R_2	$W/\sqrt{12}$	$b/\sqrt{5}$	ρ_1	$\varkappa\,(3-\varkappa^2)/\sqrt{1+6\,\varkappa^2-3\varkappa^4}$
χ_1	$\sqrt{12}\,l/L$	$\sqrt{5}\,l/a$		

* Предполагается, что оси x_1^c и x_2^c параллельны и что начало координат в модели 1 находится на продольной оси прямоугольника. Величины $M_2^{\text{н}}$, $M_3^{\text{н}}$, $M_{12}^{\text{н}}$, $M_{i3}^{\text{н}}$ $M_{t3}^{\text{н}}$, χ_2 и ρ_2 равны нулю. Введено обозначение $\varkappa=2l/L$.

1. Дислокационная модель (Бен-Менахем — Пресс — Хаскелл — Аки). В этой простой, но физически невозможной модели проскальзывание на прямоугольной площадке длин L и ширин W начинается на линии, расположенной параллельно меньшей стороне на расстоянии l от центра, и распространяется в обе стороны с постоянной скоростью V. В каждой точке постоянное по площадке конечное значение подвижки B достигается мгновенно.

2. Эллиптическая трещина (Кейлис-Борок — Сэвидж). Для этого случая мы ограничимся пространственными характеристиками. Проскальзывание начинается на расстоянии l от центра на большой оси эллиптической сдвиговой трещины, возникшей в однородном поле напряжений. Тогда, согласно [10], окончательная величина функции подвижки имеет вид

$$B(x_1^c, x_2^c, \infty) = B_0[1 - (x_1^c/a)^2 - (x_2^c/b)^2]^{1/2}$$

внутри эллипса и равно нулю вне его. Здесь a и b — полуоси эллипса.

В том случае, когда нет оснований принять ту или иную параметрическую модель очага, все же можно дать оценку его геометрических размеров и длительности, используя для этой цели среднеквадратические радиусы R_1, R_2 и среднеквадратическую длительность R_t. Покажем, как можно оценить, например, размер очага в «длину», т. е. вдоль оси x_1^c. Определим длину L очага в этом направлении как длину наименьшего интервала $(-L/2, L/2)$ на оси x_1^c, такого, что соответствующая ему полоса $-L/2 \leqslant x_1^c \leqslant L/2$, $-\infty < x_2^c < \infty$ на плоскости x_1^c, x_2^c все еще содержит очаг землетрясения. Легко получить оценку снизу для L через среднеквадратический радиус R_1. Действительно,

$$R_1^2 = M_{11}^{\text{нцс}} = M^{-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1^c)^2 B_{\text{Н}}(x_1^c, x_2^c, \infty)\, dx_1^c dx_2^c \leqslant$$

$$\leqslant (L/2)^2 M^{-1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{Н}}(x_1^c, x_2^c, \infty)\, dx_1^c dx_2^c = (L/2)^2, \tag{13}$$

где через M обозначен степенной момент нулевого порядка функции $\dot{B}_{\text{н}}(x_1^c, x_2^c, t)$:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{B}_{\text{Н}}(x_1^c, x_2^c, t)\, dx_1^c dx_2^c dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{Н}}(x_1^c, x_2^c, \infty)\, dx_1^c dx_2^c. \tag{14}$$

Из полученного неравенства (13) следует оценка снизу для длины очага

$$L \geqslant 2R_1. \tag{15}$$

При выводе неравенства (13) мы воспользовались определением величины L, согласно которому $B_{\text{н}}(x_1^c, x_2^c, \infty) = 0$ при $|x_1^c| > L/2$, а также положительностью функции $B_{\text{н}}(x_1^c, x_2^c, \infty)$, которая является следствием положительности $\dot{B}_{\text{н}}(x_1^c, x_2^c, t)$. Это позволило заменить $(x_1^c)^2$ на $(L/2)^2$ с заменой равенства на соответствующее неравенство.

Можно показать, что получить для L оценку сверху через R_1 невозможно. Однако, если характеризовать протяженность очага в направлении x_1^c величиной L_α, которая есть длина интервала $(-L_\alpha/2, L_\alpha/2)$, определяющего полосу в плоскости x_1^c, x_2^c с гарантией содержащую $\alpha \cdot 100\%$ полной массы M (M — значение момента нулевого порядка (14)), то для этой величины можно дать оценку сверху, используя R_1. Формально величина L_α определяется уравнением

$$\int_{-L_\alpha/2}^{L_\alpha/2}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1^c, x_2^c, \infty)\, dx_2^c dx_1^c = \alpha M. \tag{16}$$

Для оценки L_α воспользуемся теоремой Чебышева из теории вероятностей (см., например, [2])), которая утверждает, что для произвольной случайной величины ξ выполняется неравенство

$$P(|\xi-E\xi|\geqslant\varepsilon)\leqslant D\xi/\varepsilon^2,$$

которое можно переписать в виде

$$1-P(|\xi-E\xi|<\varepsilon)\leqslant D\xi/\varepsilon^2. \tag{17}$$

Здесь P — вероятность того, что $|\xi-E\xi|<\varepsilon$; $E\xi$ — математическое ожидание; $D\xi$ — дисперсия случайной величины; ε — произвольное положительное число. В силу положительности $B_{\text{н}}(x_1^c,\ x_2^c,\ \infty)$ функция

$$\varphi(x_1^c) = M^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{Н}}(x_1^c,\ x_2^c,\ \infty)\, dx_2^c$$

может быть принята в качестве плотности функции распределения некоторой случайной величины ξ. Поскольку начало собственной системы координат очага находится в «центре тяжести», то $E\xi=0$. Действительно,

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^c\varphi(x_1^c)\,dx_1^c = M^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^c B(x_1^c,\ x_2^c,\ \infty)\,dx_1^c dx_2^c =$$

$$= M^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^c\dot{B}(x_1^c,\ x_2^c,\ t)\,dx_1^c dx_2^c dt = M_1^{\text{нцс}} = 0\cdot$$

Аналогичным образом можно показать, что $D\xi=M_{11}^{\text{нцс}}$, т. е. $D\xi=R_1^2$. Далее, поскольку

$$P(|\xi - E\xi|<\varepsilon) = P(|\xi|<\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi(x_1^c)\,dx_1^c =$$

$$= M^{-1}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{Н}}(x_1^c,\ x_2^c,\ \infty)\,dx_1^c dx_2^c,$$

то, полагая $\varepsilon=L_\alpha/2$ и учитывая (16), получаем

$$P(|\xi-E\xi|<\varepsilon)=\alpha.$$

Теперь из неравенства (17) следует, что

$$1-\alpha\leqslant(2R_1/L_\alpha)^2,$$

откуда получаем оценку

$$L_\alpha\leqslant 2R_1/\sqrt{1-\alpha}. \tag{18}$$

Из этого неравенства следует, что, если в качестве размера очага вдоль оси x_1^c принять величину $L_*^{(\alpha)}=2R_1/\sqrt{1-\alpha}$, то интервал $(-L_*^{(\alpha)}/2,\ L_*^{(\alpha)}/2)$ на оси x_1^c будет с гарантией содержать $\alpha\cdot100\%$ полной «массы» функции $B_{\text{н}}(x_1^c,\ x_2^c,\ \infty)$. Если положить, например, $\alpha=0{,}9$, то $L_*^{(0,9)}=$ $=2\sqrt{10}\,R_1\approx 6{,}32\,R_1$.

Оценка типа (18) аналогичным образом может быть установлена и для размера очага в направлении x_2^c (в «ширину»), а также для любого другого направления в плоскости очага. Такая же оценка может быть получена для длительности T процесса движения в очаге. Для этого следует x_1^c заменить на t, а вместо $\varphi(x_1^c)$ появится функция

$$\psi(t) = M^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{B}_{\text{Н}}(x_1^c,\ x_2^c,\ t)\,dx_1^c dx_2^c.$$

3. Восстановление «сглаженного очага» по степенным моментам функции скорости подвижки $\dot{B}_{\text{н}}$

В этом параграфе мы покажем, каким образом по конечному числу степенных моментов очага можно построить функцию, которая аппроксимирует сглаженную функцию очага. Мы предполагаем, что ориентация плоскости очага и его пространственно-временные размеры известны (например, оценены изложенным выше способом). Через x_1, x_2 будем далее обозначать координаты на плоскости очага в собственной системе координат. Поскольку плоскость очага известна, то в качестве функции очага мы рассматриваем функцию $\dot{B}_{\text{н}}(x_1, x_2, t)$. Нормированные степенные моменты $M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma}$ функции $\dot{B}_{\text{н}}(x_1, x_2, t)$ связаны с ее фурье-преобразованием $\hat{\dot{B}}_{\text{н}}(k_1, k_2, \omega)$, поскольку разложение $\hat{\dot{B}}_{\text{н}}(k_1, k_2, \omega)$ в ряд Тейлора в нуле может быть записано в виде

$$\hat{\dot{B}}_{\text{Н}}(k_1, k_2, \omega) = LWT \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p \\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}} (-i)^p \frac{M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} k_1^{\alpha} k_2^{\beta} \omega^{\gamma}. \tag{19}$$

Предположим, что имеются в наличии все моменты $M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma}$ до порядка N включительно. Тогда вместо бесконечного ряда фактически может быть выписан лишь конечный отрезок этого ряда

$$\hat{\dot{B}}_{N}(k_1, k_2, \omega) = LWT \sum_{p=0} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p \\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}} |(-i)^p \frac{M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} k_1^{\alpha} k_2^{\beta} \omega^{\gamma}. \tag{20}$$

Если мы заменим истинный спектр $\hat{\dot{B}}_{\text{н}}(k_1, k_2, \omega)$ на $\hat{\dot{B}}_{N}(k_1, k_2, \omega)$ во всем пространстве переменных k_1, k_2, ω, то это приведет к тому, что в качестве функции очага будет принята функция

$$\dot{B}_{N}(x_1, x_2, t) = LWT \sum_{p=0}^{N} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p \\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}} \frac{M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \delta^{(\alpha)}(x_1)\,\delta^{(\beta)}(x_2)\,\delta^{(\gamma)}(t), \tag{21}$$

которая получается в результате применения обратного преобразования Фурье к (20). Источник с такой функцией возбуждает поле смещений, которое является аппроксимацией сглаженного действительного поля смещений [14]. Формально функция $\dot{B}_N(x_1, x_2, t)$ имеет степенные моменты до порядка N, значения которых совпадают с имеющимися значениями моментов реальной функции источника, однако, несмотря на это, функция $\dot{B}_N(x_1, x_2, t)$ не является физически допустимой. В частности, она не удовлетворяет условию положительности. И даже если наложить это условие, не исключено, что существует бесконечное множество положительных функций, моменты которых до порядка N одинаковы и совпадают с заданными. Это значит, что формальный подход не дает приемлемого решения задачи восстановления функции источника по конечному числу степенных моментов.

Наш подход заключается не в том, чтобы пытаться однозначно определить положительную функцию источника по конечному числу моментов, так, чтобы найденная функция имела значения моментов, равные данным. Мы предлагаем определять по моментам функции источника результат ее сглаживания с некоторым ядром. При этом значения моментов сглаженной функции уже не совпадают с известными значениями моментов функции источника. По сглаженной функции в определенной мере можно судить об истинной функции источника.

Рассмотрим детальнее причины, по которым функция (21) получается физически недопустимой, и наметим путь обхода этой трудности.

Суть проблемы в том, что $\hat{\dot{B}}_н(k_1, k_2, \omega)$ и $\hat{\dot{B}}_N(k_1, k_2, \omega)$ существенно различаются при больших значениях k_1, k_2, ω. Однако в пределах некоторой окрестности нуля спектр $\hat{\dot{B}}_N(k_1, k_2, \omega)$ близок к спектру $\hat{\dot{B}}_н(k_1, k_2, \omega)$, причем различие тем меньше, чем меньше размеры окрестности. Зафиксируем некоторую окрестность нуля и введем усеченные спектры $\hat{\dot{B}}_{*N}(k_1, k_2, \omega)$ и $\hat{\dot{B}}_{*н}(k_1, k_2, \omega)$ для $\hat{\dot{B}}_N(k_1, k_2, \omega)$ и $\hat{\dot{B}}_н(k_1, k_2, \omega)$ соответственно, полагая значения усеченных спектров равными значениям неусеченных в пределах рассматриваемой окрестности и равными нулю вне этой окрестности. Тогда усеченный спектр $\hat{\dot{B}}_{*N}(k_1, k_2, \omega)$ будет приближать усеченный спектр $\dot{B}_{*н}(k_1, k_2, \omega)$ во всей спектральной области, а соответствующие им оригиналы $\dot{B}_{*N}(x_1, x_2, t)$ и $\dot{B}_{*Н}(x_1, x_2, t)$ будут приближенно совпадать в силу финитности их спектра. Функция $\dot{B}_{*Н}(x_1, x_2, t)$ — сглаженная функция очага, а $\dot{B}_{*N}(x_1, x_2, t)$ — функция, ее аппроксимирующая. Далее мы выберем окрестность нуля конкретного вида и получим оценку точности аппроксимации функции $\dot{B}_{*Н}(x_1, x_2, t)$ с помощью $\dot{B}_{*N}(x_1, x_2, t)$.

Рассмотрим окрестность нуля спектральной области вида

$$|k_1| \leqslant a, \ |k_2| \leqslant b, \ |\omega| \leqslant c, \tag{22}$$

обозначим ее через Ω и введем ее характеристическую функцию $\hat{\chi}(k_1, k_2, \omega)$ формулой

$$\hat{\chi}(k_1, k_2, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_1, k_2, \omega \text{ принадлежит } \Omega \\ 0, & \text{если } k_1, k_2, \omega \text{ не принадлежит } \Omega. \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{\dot{B}}_{*Н}(k_1, k_2, \omega) = \hat{\dot{B}}_Н(k_1, k_2, \omega)\, \hat{\chi}(k_1, k_2, \omega),$$
$$\hat{\dot{B}}_{*N}(k_1, k_2, \omega) = \hat{\dot{B}}_N(k_1, k_2, \omega)\, \hat{\chi}(k_1, k_2, \omega).$$

Применим к этим функциям обратное преобразование Фурье по k_1, k_2, ω. Поскольку произведение функций при обратном преобразовании Фурье переходит в сверку, то имеем

$$\begin{aligned} \dot{B}_{*Н}(x_1, x_2, t) &= \dot{B}_Н(x_1, x_2, t) * \chi(x_1, x_2, t), \\ \dot{B}_{*N}(x_1, x_2, t) &= \dot{B}_N(x_1, x_2, t) * \chi(x_1, x_2, t). \end{aligned} \tag{23}$$

Легко показать, что обратное преобразование Фурье функции $\hat{\chi}(k_1, k_2, \omega)$ выражается формулой

$$\chi(x_1, x_2, t) = \frac{abc}{\pi^3} \sin c\,(ax_1, bx_2, ct), \tag{24}$$

где

$$\sin c\,(x_1, x_2, t) = \frac{\sin x_1}{x_1} \cdot \frac{\sin x_2}{x_2} \cdot \frac{\sin t}{t}.$$

В развернутом виде формулы (23) выглядят так:

$$\dot{B}_{*Н}(x_1, x_2, t) = C_1 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{B}_Н(y_1, y_2, \tau) \sin c\,(a(x_1 - y_1), b(x_2 - y_2), c(t - \tau))\, dy_1 dy_2 d\tau, \tag{25}$$

$$\dot{B}_{*N}(x_1, x_2, t) = C_2 \sum_{p=0}^{N} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p \\ \alpha,\beta,\gamma \geqslant 0}} \frac{M^{н}_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \frac{\partial^p \sin c\,(ax_1, bx_2, ct)}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta} \partial t^{\gamma}}, \tag{26}$$

где $C_1 = abc\pi^{-3}$, $C_2 = abcLWT\pi^{-3}$.

Формула (25) показывает, что $\dot{B}_{*\text{н}}(x_1, x_2, t)$ — это результат сглаживания функции очага $\dot{B}_\text{н}(x_1, x_2, t)$ с ядром (24). Числа a, b, c связаны с шириной ядра сглаживания в направлениях x_1, x_2, t соответственно. За характеристику ширины ядра в направлениях x_1, x_2, t естественно принять величины $2\pi a^{-1}$, $2\pi b^{-1}$, $2\pi c^{-1}$ соответственно. Числа a, b, c удобно представить в виде

$$a=\frac{n}{L}, \quad b=\frac{m}{W}, \quad c=\frac{l}{T}\,(n, m, l\geqslant 1), \tag{27}$$

где L, W — размеры очага, T — длительность процесса движения в очаге. Числа n, m, l характеризуют относительную ширину ядра сглаживания по соответствующей координате. Эти числа могут быть названы числами элементов разрешения по соответствующим координатам. Чем больше число элементов разрешения, тем меньше ширина ядра и тем более детальным является представление функции $\dot{B}_\text{н}(x_1, x_2, t)$ с помошью функции $\dot{B}_{*\text{н}}(x_1, x_2, t)$.

Оценим погрешность аппроксимации сглаженной функции $\dot{B}_{*\text{н}}(x_1, x_2, t)$ функцией $\dot{B}_{*\text{н}}(x_1, x_2, t)$. Имеем

$$\Delta\equiv|\dot{B}_{*\text{н}}(x_1, x_2, t)-\dot{B}_{*N}(x_1, x_2, t)|=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\left|\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} e^{i(\omega t+k_1x_1+k_2x_2)}\,[\hat{\dot{B}}_\text{н}(k_1, k_2, \omega)-\hat{\dot{B}}_N(k_1, k_2, \omega)]\,d\omega dk_1dk_2\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left|\hat{\dot{B}}_\text{н}(k_1, k_2, \omega)-\hat{\dot{B}}_N(k_1, k_2, \omega)\right|d\omega dk_1dk_2.$$

Подставим вместо $\hat{\dot{B}}_\text{н}(k_1, k_2, \omega)$ ряд (19), а вместо $\dot{B}_N(k_1, k_2, \omega)$ — сумму (20). Имеем

$$\Delta\leqslant\frac{LWT}{(2\pi)^3}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p\\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}}\frac{M^\text{н}_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}|k_1|^\alpha|k_2|^\beta|\omega|^\gamma d\omega dk_2dk_1=$$

$$=\frac{LWT}{\pi^3}\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p\\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}}\frac{M^\text{н}_{\alpha\beta\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\int_0^a\int_0^b\int_0^c k_1^\alpha k_2^\beta\omega^\gamma d\omega dk_2dk_1=$$

$$=\frac{LWT}{\pi^3}\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p\\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}}\frac{M^\text{н}_{\alpha\beta\gamma}}{(\alpha+1)!\,(\beta+1)!\,(\gamma+1)!}a^{\alpha+1}b^{\beta+1}c^{\gamma+1}. \tag{28}$$

Далее, поскольку

$$M^\text{н}_{\alpha\beta\gamma}=M^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{B}_\text{н}(x_1, x_2, t)\,x_1^\alpha x_2^\beta t^\gamma\,dx_1dx_2dt\leqslant$$

$$\leqslant L^\alpha W^\beta T^\gamma M^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{B}_\text{н}(x_1, x_2, t)\,dx_1dx_2dt=L^\alpha W^\beta T^\gamma, \tag{29}$$

то, воспользовавшись этой оценкой, получаем

$$\Delta\leqslant\frac{1}{\pi^3}\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p\\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}}\frac{(aL)^{\alpha+1}(bW)^{\beta+1}(cT)^{\gamma+1}}{(\alpha+1)!\,(\beta+1)!\,(\gamma+1)!}.$$

Заменяя aL, bW, cT на n, m, l соответственно, согласно (27), окончательно получаем

$$|\dot{B}_{*\text{н}}(x_1, x_2, t)-\dot{B}_{*N}(x_1, x_2, t)|\leqslant\pi^{-3}\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p\\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}}\frac{n^{\alpha+1}m^{\beta+1}l^{\gamma+1}}{(\alpha+1)!\,(\beta+1)!\,(\gamma+1)!}. \tag{30}$$

Ряд в правой части сходится при любых n, m, l, поскольку он является частью «хвоста» ряда для экспоненциальной функции $\exp(n+m+l)$. Поскольку правая часть неравенства (30) не зависит от координат, полученная оценка является равномерной по x_1, x_2, t. Если требуется, чтобы погрешность приближения не превышала некоторого предела, который мы обозначим через ε_0, то из полученной оценки следует, что для того, чтобы этого добиться, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$R(N, n, m, l) \equiv \pi^{-3} \sum_{p=N+1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=p \\ \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0}} \frac{n^{\alpha+1} m^{\beta+1} l^{\gamma+1}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \leqslant \varepsilon_0. \qquad (31)$$

Это неравенство связывает ε_0 с N-максимальным порядком моментов, имеющихся в наличии, и числами элементов разрешения n, m, l. Это неравенство позволяет ответить на любой из следующих вопросов:

1. Каков должен быть порядок N для того, чтобы степень разрешения соответствовала числам n, m, l, а точность приближения была не хуже ε_0?

2. Какой будет точность приближения, если порядок N и числа n, m, l заданы?

3. Какой будет наилучшая степень разрешения деталей функции $\dot{B}_{\text{Н}}(x_1, x_2, t)$, если имеются в наличии все моменты вплоть до порядка N, а точность приближения должна быть не хуже ε_0?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, необходимо решить уравнение

$$R(N, n, m, l) = \varepsilon_0 \qquad (32)$$

относительно соответствующих неизвестных. При этом ответ на третий вопрос не будет, вообще говоря, однозначным, если предварительно не решен вопрос о том, как соотносятся степени разрешения по различным координатам, т. е. необходимо задать отношения $n:m:l$. В случае, когда $n:m:l=1:1:1$, или, что то же самое, $n=m=l$, уравнение (32) принимает вид (после несложных преобразований)

$$\pi^{-3} n^3 \left(\exp(n) - \sum_{p=0}^{N} \frac{n^p}{p!} \right) = \varepsilon_0. \qquad (33)$$

Поскольку $\sum\limits_{p=0}^{N} \dfrac{n^p}{p!}$ — конечный отрезок бесконечного ряда, определяющего $\exp(n)$, то, очевидно, это уравнение может быть разрешено во всех трех случаях, когда неизвестными являются поочередно N, ε_0, n. Этот вывод сохраняет силу и для общего уравнения (32). Заметим, что полученная оценка (30) выражает лишь погрешность аппроксимации и не учитывает погрешности в значениях степенных моментов. В данной статье мы не обсуждаем влияние (несомненно, существенное) погрешности в значениях степенных моментов на погрешность приближения

Аналогичный (30) результат можно получить и для сглаживающего ядра более общего вида. Тогда мы получим аппроксимацию для сглаженной функции

$$\dot{B}_*(x_1, x_2, t) = C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h\left(a(x_1 - y_1), b(x_2 - y_2), c(\tau - t)\right) \times$$
$$\times \dot{B}_{\text{Н}}(y_1, y_2, \tau)\, dy_1 dy_2 d\tau, \qquad (34)$$

где C — нормирующий множитель, а произвольное положительное ядро $h(x_1, x_2, t)$ удовлетворяет лишь условию финитности спектра. В частности, это верно для ядра, которое является квадратом (24) («окно Бартлетта»). Такое ядро обладает тем преимуществом перед (24), что оно всюду положительно, хотя оценка (30) при этом ухудшается. Аналогичный результат будет справедлив и для «гауссова» ядра:

$$h(x_1, x_2, t) = Ce^{-\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}-\frac{t^2}{2}}$$

Ширина ядра должна быть определена некоторым подходящим образом.

4. Модельная обратная задача для очага землетрясения

Рассмотрим возможность определения степенных моментов функции источника $\dot{f}(\mathbf{x}, t) = (1/LWT)\dot{B}_{\text{н}}(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})$ по наблюдениям. В принципе для определения степенных моментов могут быть использованы различного рода наблюдательные данные, такие, как амплитуда собственных колебаний Земли, смещения в поверхностных и объемных волнах в ближней и дальней зонах. Мы сконцентрируем внимание на изучении возможности определения степенных моментов по наблюдениям смещений в объемных P- или (и) S-волнах в дальней зоне источника. При этом рассмотрение будет проведено в рамках модельной обратной задачи для очага землетрясения, расположенного в безграничной, однородной, изотропной, упругой среде. Очаг землетрясения удовлетворяет приведенным выше условиям, т. е. является плоской трещиной однонаправленного сдвига без обратного проскальзывания. Предполагается, что наблюдательные данные идеальны, т. е. не содержат погрешностей. Вопросы точности, связанные с неидеальностью наблюдательных данных, в статье не рассматриваются.

Поскольку ориентация плоскости очага заранее неизвестна, то естественно рассмотреть источник несколько более общего типа, тензор плотности момента которого имеет вид

$$m_{ij}(\mathbf{x}, t) = m_{ij}^{(0)} f(\mathbf{x}, t), \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{V} f(\mathbf{x}, t)\, dV dt = 1 \right), \tag{35}$$

где $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ — финитная функция, пространственный носитель которой представляет собой трехмерную область V.

В дальней зоне источника описанного типа, имеющего тензор плотности момента $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$, смещения на луче с направляющим ортом $\mathbf{r}$ в случае безграничной, однородной, упругой, изотропной среды определяются уравнениями (см., например, [6]) (компоненты P- и S-волн рассматриваются отдельно):

$$u_k^P(\mathbf{r}, t + R/c_P) = (4\pi\rho c_P^3 R)^{-1} r_k r_l r_i \int_V \dot{m}_{li}(\mathbf{x}, t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)\, dV, \tag{36}$$

$$u_k^S(\mathbf{r}, t + R/c_S) = (4\pi\rho c_S^3 R)^{-1} (r_k r_l - \delta_{kl}) r_i \int_V \dot{m}_{li}(\mathbf{x}, t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_S)\, dV, \tag{37}$$

где c_P, c_S — скорости P- и S-волн, R — расстояние от источника до точки наблюдения (система координат выбрана как указано в разделе 1), ρ — плотность среды, δ_{ij} — символ Кронекера.

С учетом того, что тензор $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$ имеет структуру (35), эти уравнения могут быть записаны в виде

$$Q_k^P \int_V \dot{f}(\mathbf{x}, t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)\, dV = u_k^P(\mathbf{r}, t + R/c_P), \tag{38}$$

$$Q_k^S \int_V \dot{f}(\mathbf{x}, t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_S)\, dV = u_k^S(\mathbf{r}, t + R/c_S), \tag{39}$$

где

$$Q_k^P = (4\pi\rho c_P^3 R)^{-1} r_k r_l r_i m_{li}^{(0)},$$

$$Q_k^S = (4\pi\rho c_S^3 R)^{-1} (r_k r_l - \delta_{kl}) r_i m_{li}^{(0)}.$$

Проинтегрируем уравнения (38), (39) по t в пределах от $-\infty$ до ∞ (в силу финитности $f(\mathbf{x}, t)$ пределы будут конечны). Имеем с учетом определения $f(\mathbf{x}, t)$ (35)

$$Q_k^P = \int_{-\infty}^{\infty} u_k^P(\mathbf{r}, t)\, dt, \tag{40}$$

$$Q_k^S = \int_{-\infty}^{\infty} u_k^S(\mathbf{r}, t)\, dt. \tag{41}$$

Умножим скалярно уравнение (38) на Q_k^P, а уравнение (39) на Q_k^S; после несложных преобразований имеем

$$\int_V \dot{f}(\mathbf{x}, t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)\, dV = U_P(\mathbf{r}, t), \tag{42}$$

$$\int_V \dot{f}(\mathbf{x}, t + \mathbf{x}\cdot r/c_S)\, dV = U_S(\mathbf{r}, t), \tag{43}$$

где

$$U_P(\mathbf{r}, t) = u_k^P Q_k^P / (Q_i^P Q_i^P),\ U_S(\mathbf{r}, t) = u_k^S Q_k^S / (Q_i^S Q_i^S).$$

В силу (40) и (41) эти функции полностью определяются функциями $u_k^P(\mathbf{r}, t)$ и $u_k^S(\mathbf{r}, t)$. Поскольку уравнения (42) и (43) имеют идентичную структуру, ограничим наше рассмотрение случаем, когда имеются наблюдения смещений только в P-волнах. При этом случай, когда имеются наблюдения смещений только в S-волнах, рассматривается аналогично, а случай, когда имеются наблюдения смещений как в P-, так и в S-волнах, будет упомянут ниже.

Для иллюстрации трудностей, возникающих при попытке решать уравнение (42), полезно перейти в спектральную область. С этой целью применим к уравнению (42) преобразование Фурье по времени. В результате получим

$$\int_V \tilde{\dot{f}}(\mathbf{x}, \omega)\, e^{i\omega\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}/c_P}\, dV = \tilde{U}_P(\mathbf{r}, \omega),$$

где знак «$\sim$» обозначает преобразование Фурье по t. Это соотношение можно переписать в виде

$$\hat{\dot{f}}(\mathbf{k}, \omega)\Big|_{\mathbf{k} = -\frac{\omega\cdot\mathbf{r}}{c_P}} = \tilde{U}_P(\mathbf{r}, \omega), \tag{44}$$

где $\hat{\dot{f}}(\mathbf{k}, \omega)$ — пространственно-временное преобразование Фурье функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$.

Таким образом, уравнение (42) во временной области эквивалентно уравнению (44) в спектральной. Уравнение (44) означает, что исходные данные в принципе не позволяют определить спектральную функцию $\hat{\dot{f}}(\mathbf{k}, \omega)$ вне поверхности конуса (поскольку $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$):

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2/c_P^2. \tag{45}$$

Это значит, что при попытке детального определения функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ неизбежна необходимость аналитического продолжения функции $\hat{\dot{f}}(\mathbf{k}, \omega)$ ($\hat{\dot{f}}(\mathbf{k}, \omega)$ — аналитическая функция, так как $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ — финитная) с поверхности конуса (45) на всю спектральную область, что является источником некорректности решения обратной задачи детального определения функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$ из уравнения (42). В частности, уравнение (42) не обладает свойством однозначной разрешимости, т. е. соответствующее однородное уравнение

$$\int_V \dot{f}(\mathbf{x}, t + \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)\,dV = 0 \tag{46}$$

имеет ненулевое решение. Примером решения уравнения (46), которое может быть принято в качестве функции очага (т. е. удовлетворяющей свойству финитности по $\mathbf{x}$ и t), является функция [20]

$$\psi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_3^2} - c_P^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},$$

где $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ — произвольная финитная функция. Источники, функции которых удовлетворяет уравнению (46), получили название неизлучающих [20].

Как видно из последующего изложения, неединственность решения уравнения (42) проявляется в невозможности однозначного определения всех степенных моментов функции объемного источника. Мы используем уравнение (42) для получения соотношения, связывающего степенные моменты функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$. Если умножить обе части этого уравнения на t^K ($K=1, 2\ldots$), проинтегрировать по t от $-\infty$ до ∞, изменить порядок интегрирования по времени и пространству и сделать замену $\tau = t + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)$, то в результате имеем соотношение

$$\int_V \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(\mathbf{x}, \tau)(\tau - \mathbf{x}\cdot\mathbf{r}/c_P)^K d\tau dV = \int_{-\infty}^{\infty} U_P(\mathbf{r}, t)\, t^K dt \quad (K = 1, 2, \ldots), \tag{47}$$

из которого, раскрывая бином в левой части, получаем искомое соотношение

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=K} A_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r})\cdot M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma\delta} = E_K(\mathbf{r}), \tag{48}$$

где

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r}) = (-r_1/c_P)^\alpha(-r_2/c_P)^\beta(-r_3/c_P)^\gamma, \quad E_K(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} U_P(\mathbf{r}, t)\, t^K dt,$$

а $M^{\text{н}}_{\alpha\beta\gamma\delta}$— нормированные степенные моменты функции $\dot{f}(\mathbf{x}, t)$. Это соотношение связывает все степенные моменты порядка K. Рассмотрим подробнее соотношение (48) для $K=1, 2$, т. е. для первых и вторых моментов. Имеем

$$\begin{gathered} M^{\text{н}}_t - r_i M^{\text{н}}_i/c_P = E_1(\mathbf{r}), \\ M^{\text{н}}_{tt} - 2r_i M^{\text{н}}_{it}/c_P + r_i r_j M^{\text{н}}_{ij}/c_P^2 = E_2(\mathbf{r}). \end{gathered} \tag{49}$$

Функции $1, r_1\ldots r_2, r_3$ линейно независимы как функции от $\mathbf{r}$, поэтому из первого соотношения моменты первого порядка определяются однозначно, что неверно для моментов порядка $K \geqslant 2$. Действительно, с учетом того, что $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$, второе соотношение можно записать в виде

$$(c_P^2 M^{\text{н}}_{tt}\delta_{ij} + M^{\text{н}}_{ij})\, r_i r_j/c_P^2 - 2M^{\text{н}}_{it} r_i/c_P = E_2(\mathbf{r}). \tag{50}$$

Поскольку функции r_i, $r_l r_k$ ($i, k, l = 1, 2, 3$) линейно независимы, то лишь величины $M^{\text{н}}_{it}$, $M^{\text{н}}_{jj} + c_P^2 M^{\text{н}}_{tt}$ (нет суммирования), $M^{\text{н}}_{ij}$ ($i \neq l$) могут быть в принципе найдены из (50) однозначно, а исходный набор неизвестных однозначно не определяется.

Таким образом, в общем случае пространственного источника при рассмотрении одного типа волн не все вторые моменты определяются однозначно. Для моментов порядка $K \geqslant 2$ ситуация аналогична. Наличие условия $r_1^2+r_2^2+r_3^2=1$ приводит к линейной связи между коэффициентами $A_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r})$ как функциями от $\mathbf{r}$, вследствие которой оказывается в принципе невозможным однозначное определение из (48) всех моментов порядка $K \geqslant 2$. Можно показать, что число произвольных параметров, которые остаются неопределенными, в моментах порядка $K \geqslant 2$ для случая одного типа волн равно $K(K^2-1)/6$.

Для источника, расположенного на плоскости (с заранее неизвестной ориентацией), описанная неоднозначность устраняется и все степенные моменты в принципе могут быть определены. Однако способ определения ориентации, использованный ранее в разделе 2, теперь нельзя применить непосредственно, так как ранее мы считали все моменты порядков 1 и 2 известными. Поскольку мы пока не знаем ориентации очага, нужный для этого набор моментов, как показано выше, полностью определить нельзя. Тем не менее ориентация плоскости источника все же может быть определена и в этих условиях, причем существенную роль играет условие положительности функции источника.

Действительно, как мы установили, из (50) можно найти величины $M_{ij}^{\text{н}} + c_P^2 M_{tt}^{\text{н}}\,\delta_{ij}$ и далее соответствующие им центрированные

$$A_{ij} = M_{ij}^{\text{нц}} + c_P^2 M_{tt}^{\text{н}}\delta_{ij} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{51}$$

Пусть a_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ — главные значения тензора A_{ij}, занумерованные в порядке убывания: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3$, тогда

$$a_i = b_i + c_P^2 M_{tt}^{\text{н}},$$

где b_i — главные значения тензора $M_{ij}^{\text{нц}}$. Из этого соотношения следует, что величины b_i также упорядочены по убыванию: $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3$. А поскольку эти величины, с одной стороны, неотрицательны в силу положительности функции очага $f(\mathbf{x},\ t)$, а с другой стороны, одна из них обязательно равна нулю (см. раздел 2), то, значит, $b_3=0$, откуда $M_{tt}^{\text{н}} = c_P^{-2}a_3$, и тем самым неоднозначность ликвидирована. Далее имеем $b_1=a_1-a_3$, $b_2=a_1-a_2$. При этом главные оси тензора A_{ij} совпадают с главными осями тензора $M_{ij}^{\text{нц}}$ и тем самым определяют собственную системы координат источника, а собственный вектор, соответствующий b_3, определяет направление вектора нормали $\mathbf{n}$, т. е. ориентацию плоскости источника. Очевидно, что $b_1=M_{11}^{\text{нцс}}$, $b_2=M_{22}^{\text{нцс}}$. В собственной системе координат для плоского очага $f(\mathbf{x}^c,\ t)=(1/LWT)B_{\text{н}}(x_1^c,\ x_2^c,\ t)\,\delta(x_3^c)$, а уравнение (42) принимает вид

$$\frac{1}{LWT}\int\limits_{\Sigma} \dot{B}_{\text{н}}\left(x_1^c,\ x_2^c,\ t + \frac{x_1^c r_1 + x_2^c r_2}{c_P}\right) dS = U_P(\mathbf{r},\ t). \tag{52}$$

При этом уравнение (44) имеет вид

$$\hat{\dot{B}}_{\text{н}}(k_1,\ k_2,\ \omega)\Big|_{(k_1,k_2)=\left(-\frac{r_1\omega}{c_P},\ -\frac{r_2\omega}{c_P}\right)} = LWT\tilde{U}_P(\mathbf{r},\ \omega), \tag{53}$$

Поскольку $r_1^2+r_2^2 \leqslant 1$, то это уравнение означает, что наблюдения позволяют в принципе определить $\hat{\dot{B}}(k_1,\ k_2,\ \omega)$ лишь в конусе

$$k_1^2 + k_2^2 \leqslant \omega^2/c_P^2. \tag{54}$$

Таким образом, переход к случаю очага на плоскости не снимает необходимости аналитического продолжения, в данном случае продолжения $\dot{B}_{\text{н}}(k_1,\ k_2,\ \omega)$ из конуса (54) на все пространство $k_1,\ k_2,\ \omega$, если пытаться определить функцию $\dot{B}_{\text{н}}(x_1^c, x_2^c, t)$ во всех деталях [6]. Этот путь, как уже отмечалось, ведет к неустойчивому решению. Наш подход, опирающийся на конечную совокупность степенных моментов функции $\dot{B}_{\text{н}}(x_1^c, x_2^c, t)$, по существу есть попытка продолжить спектр $\hat{\dot{B}}_{\text{н}}(k_1, k_2, \omega)$ из конуса (54) на ограниченную окрестность нуля в области спектра, что в принципе можно сделать устойчиво.

Соотношение для нормированных степенных моментов функции можно получить аналогично тому, как это было сделано в случае уравнения (42). Оно имеет вид

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=K} M^{\text{нцс}}_{\alpha\beta\gamma} \cdot a_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = E_K(\mathbf{r}), \tag{55}$$

где

$$a_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}) = (-r_1/c_P)^{\alpha}(-r_2/c_P)^{\beta}.$$

Здесь коэффициенты $a_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r})$ будут уже линейно независимы, и из соотношения (55) в принципе можно определить все моменты порядка K.

Для практического определения величин $M_i^{\text{н}}$, $M_t^{\text{н}}$, $M^{\text{н}}_{ij} + c_P^2 M^{\text{н}}_{tt}\delta_{ij}$, $M^{\text{н}}_{ti}$ $M^{\text{н}}_{tt}$ из соотношения (49) и $M^{\text{нцс}}_{\alpha\beta\gamma}$ из (55) (при фиксированном K) необходимо иметь наблюдения на достаточном количестве лучей $\mathbf{r}_{(l)}$ ($l=1, \ldots, N$), которые находятся в общем положении. Далее необходимо выписать соотношение (49) или (55) для каждого луча. В результате получается система линейных уравнений, которую необходимо решить методом наименьших квадратов (м. н. к.). Минимальное число уравнений, необходимое для определения $M_i^{\text{н}}$, $M_t^{\text{н}}$, равно 4: $M^{\text{н}}_{ij} + c_P^2 M^{\text{н}}_{tt}\delta_{ij}$, $M^{\text{н}}_{ti}$ — 9; для определения $M^{\text{нцс}}_{\alpha\beta\gamma}$ при $\alpha+\beta+\gamma=K$ оно равно $(K+2)\cdot(K+1)/2$. Заметим, что соотношение (50) можно сразу записать относительно центральных нормированных моментов, для чего необходимо возвести в квадрат первое соотношение (49) и вычесть его из второго. С ростом порядка K число обусловленности матрицы м. н. к. системы для $M^{\text{нцс}}_{\alpha\beta\gamma}$ будет, по-видимому, возрастать, что может быть причиной необходимости ограничить порядок не из-за недостатка данных, а из-за резкого роста ошибки решения. Детальный анализ данного явления проводиться не будет, так как для этого необходим явный учет ошибок исходных данных, от чего мы отказались на данном этапе исследований.

Остановимся кратко на случае совместного использования наблюдений смещений в P- и S-волнах. Хотя в этом случае уменьшается неоднозначность в определении степенных моментов функции объемного источника, однако она не ликвидируется полностью. Оказывается, что в этом случае в принципе однозначно могут быть определены все степенные моменты функции источника до третьего порядка включительно, а число произвольных параметров в моментах порядка $K \geqslant 4$ равно $(K-1)(K-2)(K-3)/6$. Поскольку вторые моменты могут быть определены однозначно, ориентация плоскости источника находится способом, изложенным в разделе 2. Для каждого вектора $\mathbf{r}$ соотношения типа (49) и (55) могут быть выписаны также и для S-волн, поэтому число точек наблюдения, необходимых для составления системы линейных уравнений для неизвестных моментов, сокращается вдвое.

Заметим, что в процессе рассмотрения модельной задачи мы доказали принципиальную однозначность ее решения (при условии, что наблюдения известны для всех лучей), не предполагая, что ориентация плоскости очага известна. Для случая плоскости с известной ориентацией и несколько более общего предположения о виде $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$ однозначность решения обратной задачи была доказана ранее Б. В. Костровым [6]. Можно также доказать, что если источник с тензором плотности момента вида (35) расположен на фиксированной гладкой поверхности, то обратная задача для такого источника имеет единственное решение. Однако доказательство этого мы здесь не приводим.

В последнее время появились указания [1] на то, что очаг как для глубоких, так и для поверхностных землетрясений имеет более сложный характер, чем принято нами: либо он не имеет чисто сдвигового характера, либо сдвиг происходит по криволинейной поверхности или системе параллельных плоскостей. Не исключено также возникновение в источнике объемной неупругой деформации. Во всех этих случаях наш подход непосредственно неприменим. Поскольку для общего случая объемного очага с меняющейся от точки к точке структурой тензора $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$ нельзя (как указали Г. Бэкус и М. Малкаи [14]) определить однозначно даже моменты первых двух порядков от тензорной функции $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$, представляет интерес характеризация очага в предположении постоянства структуры тензора $m_{ij}(\mathbf{x}, t)$, но для произвольного (объемного или расположенного на поверхности) очага. В этом случае, хотя указанная однозначность и не ликвидируется, как показано выше, наш подход позволяет определить положение «центра тяжести» и ориентировку главных осей «эллипсоида инерции» очага.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакина Л. М., Голубева Н. В.* Особенности механизма очагов глубоких землетрясений Японского и Охотского морей.— Изв. АН СССР. Сер. физика Земли, 1979, № 9.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976. 352 с.
3. *Гусев А. А., Павлов В. М.* Система интегральных характеристик очага землетрясения, определяемых по смещениям в объемных волнах в дальней зоне.— Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 2, с. 289—292.
4. *Гольцман Ф. М.* Статистические модели интерпретации. М.: Наука, 1971. 328 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
6. *Костров Б. В.* Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1975. 176 с.
7. *Костров Б. В.* Автомодельные задачи о распространении трещин касательного разрыва.— Прикл. математ. и мех., 1964, т. 28, вып. 5.
8. *Павлов В. М., Гусев А. А.* К возможности восстановления движения в очаге глубокого землетрясения по полю объемных волн в дальней зоне.— Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 4, с. 824—829.
9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Н.* Методы решения некоррективных задач. М.: Наука, 1974.
10. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: ИЛ, 1963.
11. *Aki K.* Generation and propagation of *G*-waves from the Niigata earthquake of June 16, 1964. Pt. 2: Estimation of earthquake moment, released energy and stress-strain drop from *G*-wave spectrum.— Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ., 1966, v. 44, № 1.
12. *Aki K.* Earthquake mechanism.— Tectonophysics, 1972, v. 13, № 1—4, p. 423—446 (Имеется перевод на русский язык в кн.: Верхняя мантия. М.: Мир, 1975, с. 194—213).
13. *Anderson J. G., Richards P. G.* Comparison of strong ground motion from several dislocation models.— Geophys. J. Roy Astron. Soc., 1975, № 42, p. 347—373.
14. *Backus G., Mulkahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. I. Continuous displacements.— Geophys. J. Roy Astron. Soc., 1976, № 46, p. 341—361.
15. *Backus G., Mulkahy M.* Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. II. Discontinuous displacements.— Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1976, № 47, p. 301—329.
16. *Backus G.* Interpreting the seismic glut moments of total degree two or less.— Geophys. J. Roy Astron. Soc., 1977, v. 51, № 1, p. 1—25.
17. *Ben-Menahem A., Smith S. W., Teng T.* A procedure for source studies from spectrums of long-period seismic body waves.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1965, v. 55, № 2.
18. *Berckhemmer H., Jacob K. H.* Investigation of the dynamical process in earthquake foci by analysing the pulse of body waves. Proc. X. Assembl. ESC, 1968, v. 11, p. 253—334.
19. *Brune J.* Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes.— J. Geophys. Res., 1970, v. 75, № 26.
20. *Friedlander F. G.* On the inverse problem for wave equation.— Proc. Lond. Math. Soc., 1973, v. 3, № 27, p. 551—576.
21. *Fukao Y.* Source process of a large deep focus earthquake and its tectonic implications — the Western Brazil earthquake of 1963.— Phys. Earth. Planet. Int., 1972, v. 5, p. 61—76.

22. *Haskell N.* Total energy and energy spectral density of elastic wave radiation from propagating faults. I.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1964, v. 54, p. 1811—1842.
23. *Keylis-Borok V. I.* On estimation of the displacement in an earthquake source and of source dimensions.— Ann. di Geophys., 1959, № 12, p. 205—215.
24. *Knopoff L., Mouton I.* Can one determine seismic focal parameters from the far-field radiation.— Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1975, v. 42, № 2, p. 591—606.
25. *Press F., Ben-Menahem A., Toksöz M. N.* Experimental determination of earthquake fault length and rupture velocity.— J. Geophys. Res., 1961, v. 66, p. 3471—3485.
26. *Sato T., Hirasawa T.* Body wave spectra from propagating shear cracks.— J. Phys. Earth, 1973, v. 21, p. 415—431.
27. *Savage J. C.* Radiation of a realistic model of faulting.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1966, v. 56, p. 577—592.
28. *Thatcher W., Hanks T. C.* Source parameters of southern California earthquakes.— J. Geophys. Res., 1973, v. 78, p. 8547—8576.

Институт вулканологии
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
24.VI.1981